

## EEM3010 Sissejuhatus mehhatroonikasse

### 4. nädala ülesannete (praktikumi ja iseseisvaks lahendamiseks) lahendused/vastused

Soovitan väga enne lahenduste vaatamist ise proovida ülesandeid lahendada.

Tihti saab ülesannet mitut moodi lahendada, kuid lõppvastus peaks olema alati sama.

#### Praktikumi ülesannete lahendused

##### **Ülesanne 1**

Tähistame antud suurused:

$m_1 = 500 \text{ g} = 0,500 \text{ kg}$  – esimese keha mass,

$m_2 = 600 \text{ g} = 0,600 \text{ kg}$  – teise keha mass.

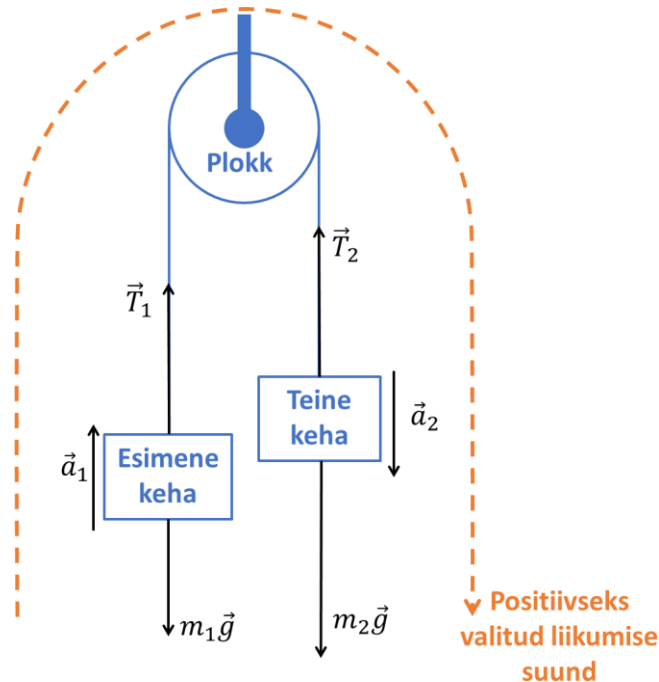
Selleks, et vastata küsimustele, peame leidma järgmised suurused:

$a_1$  – esimese keha kiirendus,

$a_2$  – teise keha kiirendus.

Plokkiks nimetatakse vabalt pöörlevat ratast ühes hoidjaga, mis muuda nööri suunda. Liikumatu tähendab seda, et ploki ratas küll saab pöörelda, kuid ratta hoidja ise ei liigu.

Esimese sammuna tuleb teha joonis ja kanda sinna peale kõik jõud. Samuti tuleb kokku leppida, milline on positiivne liikumise suund. Kuna eeldatavalt hakkab raskem keha alla poole liikuma, siis valime selle positiivseks liikumise suunaks.



Loeme niidi ja ploki ratta massi tühiseks võrreldes kehade massidega ja neid seetõttu ei arvesta. Kummalegi kehal mõjub raskusjõud ehk gravitatsioonijõud,  $m_1\vec{g}$  ja  $m_2\vec{g}$ . Kui kehadele mõjuks ainult raskusjõud, siis langeksid nad alla raskuskiirendusega. Antud juhul nõör takistab seda. Seega peame arvesse võtma ka nõöri poolt mõlemale kehale mõjuvat jõudu ehk nõöri pinget,  $\vec{T}_1$  ja  $\vec{T}_2$ .

Kirjutame nüüd mõlema keha kohta välja Newtoni II seaduse. Ühele poole võrdusmärki jääb massi ja kiirenduse suhe ning teisele poole võrdusmärki kõikide kehale mõjuvate jõudude summa. Arvestame ka positiivseks loetud liikumise suunda ja valemisse paneme vektorite moodulid. Seega tuleb meil ise panna kirja milliseid jõudusid liidame ja milliseid lahutame. Saame kahe keha kohta kaks võrrandit

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g,$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2.$$

Hetkel on meil kahe võrrandi kohta neli tundmatut ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $T_1$  ja  $T_2$ ). Seega süsteemi lahendamiseks peame veel kaks võrrandit lisama. Eeldades, et nõör ei ole veniv, siis mõlema keha kiirenduste moodulid peab olema samad ja tähistame kiirenduse lihtsalt  $a$  ehk

$$a_1 = a_2 = a.$$

Teise võrrandi saame juurde Newtoni III seadusest. Kaks keha mõjutavad teineteist absoluutväärtuselt võrdsete, kuid vastassuunaliste jõududega. Seega saame öelda, et nõöri pinge moodulid peavad olema võrdsed ja tähistame nõöri pinge lihtsalt  $T$  ehk

$$T_1 = T_2 = T.$$

Pannes nüüd need kaks asendust mõlema keha kohta välja kirjutatud Newtoni II seadusesse, saame kahe tundmatuga võrrandisüsteemi

$$m_1 a = T - m_1 g,$$

$$m_2 a = m_2 g - T.$$

Kiirenduse leidmiseks avaldame esimesest valemist nõöri pinge

$$T = m_1 a + m_1 g$$

ja paneme selle teise valemisse

$$m_2 a = m_2 g - m_1 a - m_1 g.$$

Avaldame nüüd siit kiirenduse  $a$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \frac{0,600 \text{ kg} - 0,500 \text{ kg}}{0,600 \text{ kg} + 0,500 \text{ kg}} \cdot 9,807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,892 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Lõppvastuseks saame, et mõlemad kehad hakkavad liikuma kiirendusega  $0,892 \text{ m/s}^2$ .

## Ülesanne 2

Tähistame antud suurused:

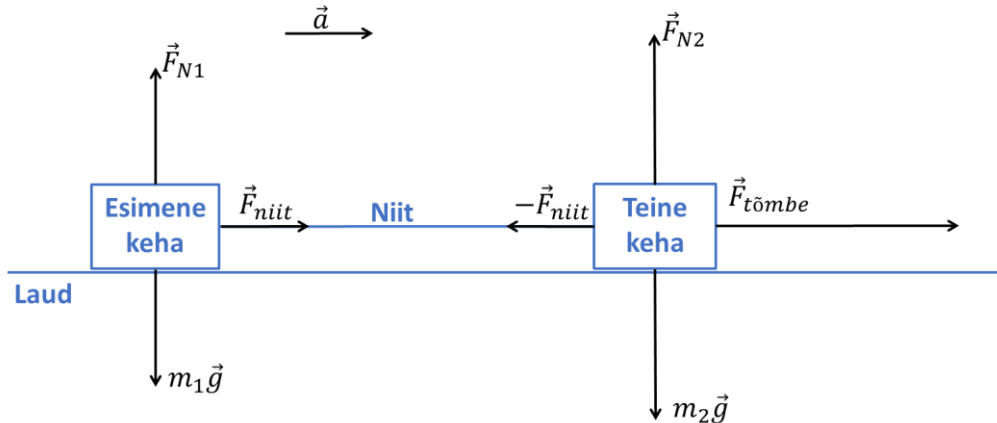
$m_1 = 2,0 \text{ kg}$  – esimese keha mass,

$m_2 = 4,0 \text{ kg}$  – teise keha mass.

$F_{\text{niit},kr} = 2,0 \text{ N}$  – jõud, mida niit kannatab.

Meie käest küsitakse  $F_{tõmbe}$  – jõudu, millega keha peab tõmbama, et niit katkeks.

Teeme joonise, kus teist keha tõmbame ja esimesele kehale mõjub seetõttu niidi poolt tekitatud jõud  $F_{niit}$ , mis on katkemise piirjuhul võrdne selle kriitilise väärtusega. Eeldades, et niit ei ole veniv, siis mõlemad kehad liiguvad sama kiirendusega  $\vec{a}$ .



Valime positiivseks liikumise suunaks tõmbe ehk kiirenduse suuna. Ülesannet võib lahendada kahte moodi. Me võime kirjutada Newtoni II seaduse välja kas teise keha kohta või kogu süsteemile, mis hõlmab mõlemat keha. Kuna kehad asetsevad horisontaalsel laual, siis kehade raskusjõud  $m_1\vec{g}$  ja  $m_2\vec{g}$  on kompenseeritud laua normaaljõuga kummalegi kehale  $\vec{F}_{N1}$  ja  $\vec{F}_{N2}$  ja nende summa on 0.

Kirjutame Newtoni II seaduse välja teise keha kohta

$$m_2 a = F_{tõmbe} - F_{niit}.$$

Kirjutame Newtoni II seaduse välja kogu süsteemi kohta

$$(m_1 + m_2) a = F_{tõmbe}.$$

Ükskõik kumba valemist me ka kasutame, igal juhul on vaja teada kiirendust. Selleks, et leida kehade süsteemi kiirendus, tuleb kirjutada Newtoni II seadus tagumise keha jaoks ehk kehale, mida tõmbab ainult niit. Antud juhul on selleks esimene keha

$$m_1 a = F_{niit},$$

$$a = \frac{F_{niit}}{m_1}.$$

Kui nüüd siit saadud kiirendus asendada eespool olnud kahest valemist ühte, siis saame lõppvalemiks

$$F_{tõmbe} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} F_{niit}.$$

Asendame nüüd niidi poolt avaldatud jõu niidi katkemise kriitilise väärtusega ja paneme arvud asemele,

$$F_{tõmbe} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} F_{niit,kr} = \frac{(2,0 \text{ kg} + 4,0 \text{ kg})}{2,0 \text{ kg}} \cdot 2,0 \text{ N} = 6,0 \text{ N}.$$

Nagu me näeme, siis sõltub valem sellest, kumba keha tõmmatakse. Seega tuleks analoogiliselt välja arvutada juht, kui tõmmatakse esimest keha teise keha asemel. Proovige seda ise teha. Sellisel juhul saame jõuks 3,0 N.

Lõppvastuseks saame, et kui tõmmatakse raskemat keha, siis on vaja niidi katkemiseks rakendada jõudu vähemalt 6,0 N ja kui tõmmatakse kergemat keha siis on vaja rakendada jõudu vähemalt 3,0 N.

### Ülesanne 3

Tähistame antud suurused:

$a = 30g$  – auto pidurduskiirendus,

$m_i = 75 \text{ kg}$  – inimese mass,

$v = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 22,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  – auto kiirus,

$m_a = 1,3 \text{ t} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg}$  – auto mass.

Vaja on leida

$F$  – inimesele mõjuv jõud,

$s$  – auto pidurdustee pikkus.

Eeldame, et auto sõidab mööda horisontaalset teed. Kuna raskusjõud mõjub risti liikumise suunaga ja on tasakaalustatud istme normaaljõuga, siis seda ei ole vaja arvestada.

Alustame inimesele mõjuva jõu leidmisega. Selleks kirjutame välja Newtoni II seaduse inimese jaoks moodulkujul. Kuna raskusjõud ja normaaljõud tasakaalustavad teineteist, siis jõudude summasse jääb alles ainult see jõud, mis inimese keha pidurdab. Seda ka meie käest küsitakse ja arvutame selle välja.

$$F = ma = 75 \text{ kg} \cdot 30 \cdot 9,807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 22 \text{ kN}.$$

See on umbes sama suur jõud kui 2,2 t keha raskusjõud.

Kuna ei ole antud, kuidas kiirendus muutub pidurdamisel, siis vaatame seda liikumist, kui konstantse kiirendusega liikumist. Kasutame teepikkuse leidmiseks järgmist valemit moodulkujul ja loeme positiivseks liikumise suunaks auto liikumise suuna,

$$s = \frac{v_{lõpp}^2 - v^2}{-2a},$$

kus  $v_{lõpp}$  on keha lõppkiirus, mis on 0. Paneme nüüd arvud sisse ja arvutame pidurdustee välja,

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(22,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 30 \cdot 9,807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 0,84 \text{ m}.$$

Selle 82 cm arvelt peab minema kokku auto esiots avariis, kui sõidetakse vastu betoonseina või on laupkokkupõrge sama kiirusel vastu tuleva samasuguse autoga. Seega on oluline, et autol oleks piisavalt deformeeruvaid kohti.

Lõppvastuseks on, et inimesele mõjub kokkupõrkes jõud 22 kN ja auto pidurdustee pikkus on sellises kokkupõrkes 0,84 m.

PS! Lõppvalemist näeme, et pidurdustee pikkus ei ole mitte võrdeline auto kiirusega vaid kiiruse ruuduga. Seega, kui auto kiirus kasvab 2 korda, siis pidurdustee on 4 korda pikem.

#### Ülesanne 4

Tähistame antud suurused:

$h = 10,7 \text{ m}$  – eseme kõrgus maapinnast,

$m = 350 \text{ kg}$  – eseme mass,

$m_1 = 100 \text{ kg}$  – esimese tüki mass,

$v_1 = 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  – esimese tüki kiirus,

$m_2 = 200 \text{ kg}$  – teise tüki mass,

$v_2 = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  – teise tüki kiirusteine auto kiirus.

Leida on vaja:

$v_3$  – kolmanda tüki kiirus ja lennusuund.

Siin tuleb kasutada impulsi jäävuse seadust. Keha summaarne algimpulss ja lõppimpulss peavad olema võrdsed. Seejuures peab rõhutama, et impulss on vektoriaalne suurus. Seega

$$m\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3,$$

kus  $\vec{v}_0$  on keha algkiirus enne lõhkamist ja  $m$  on keha mass,  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  ja  $\vec{v}_3$  on kildude kiirused ja  $m_1$ ,  $m_2$  ja  $m_3$  on kildude massid. Kolmanda killu massi saame leida kahe esimese killu masside abil

$$m_3 = m - m_1 - m_2.$$

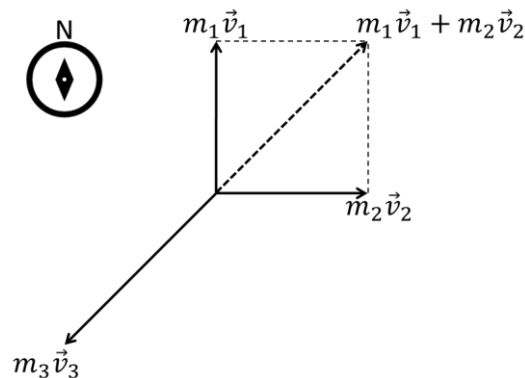
Kuna keha algkiirus  $\vec{v}_0=0$ , siis ka keha algimpulss on null. Seega saame, et

$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

ehk

$$-m_3\vec{v}_3 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Seega kolmanda tüki impulsi on vastupidise suunaga esimese ja teise tüki impulsside summale. Teeme joonise kuhu kanname need kolm impulsi peale. Joonisel on esimese kahe tüki impulsside summa tähistatud punktiirjoonega.



Kuna esimesed kaks tükki lendavad täisnurga all üksteise suhtes, siis moodulkujul peavad impulssid olema seotud järgmiselt

$$m_3 v_3 = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}.$$

Siit saame leida kolmanda tüki kiiruse

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_3} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m - m_1 - m_2} = \\ &= \frac{\sqrt{(100 \text{ kg} \cdot 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + (200 \text{ kg} \cdot 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}}{350 \text{ kg} - 100 \text{ kg} - 200 \text{ kg}} \approx 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Suuna leidmise kasutame seda, et antud ülesandes juhul on esimese ja teise tüki impulsside absoluutväärtused sama suured ehk moodulkujul  $m_1 v_1 = m_2 v_2$ . Seega esimese ja teise tükide summaarne impulss on kirde suunas ja siit saame, et kolmanda tükki impulss peab olema sellega vastassuunas ehk edela suunas.

Lõppvastuseks on, et kolmas tükk lendab kiirusega 14 m/s edela suunas.

## Ülesanne 5

Tähistame antud suurused:

$d = 100 \text{ m}$  – tiiviku läbimõõt,

$f = 0,30 \text{ Hz}$  – tiiviku pöörlemisagedus,

$m = 1,0 \text{ kg}$  – keha mass.

Leida on vaja:

$F_{polt}$  – poltidele poolt mõjuv jõud, mis hoiavad kinni tiiviku laba otsa kinnitatud keha.

Sellel kehale mõjub kaks jõudu, kui õhutakistust ei arvesta: jõud millega poldid hoiavad keha kinni  $\vec{F}_{polt}$  ja raskusjõud  $m\vec{g}$ , kus  $\vec{g}$  on raskuskiirendus. Need kaks jõudu kokku annavad kesktõmbejõu  $\vec{F}_{kesk}$ , mille tõttu keha liigub mööda ringjoont. Seega saame vektorkujul kirjutada

$$\vec{F}_{kesk} = \vec{F}_{polt} + m\vec{g},$$

$$\vec{F}_{polt} = \vec{F}_{kesk} - m\vec{g}.$$

Leiame, kui suurt kesktõmbejõudu on vaja, et keha liiguks mööda ringjoont. Selleks on vaja teada keha normaalkiirendust  $\vec{a}_n$ . Viimase mooduli saame leida valemist

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

kus  $v$  on keha kiirus ja  $r$  on trajektoori kõverusraadius. Seega kesktõmbejõu moodul avaldub järgmiselt:

$$F_{kesk} = ma_n = m \frac{v^2}{r} = m \frac{2v^2}{d},$$

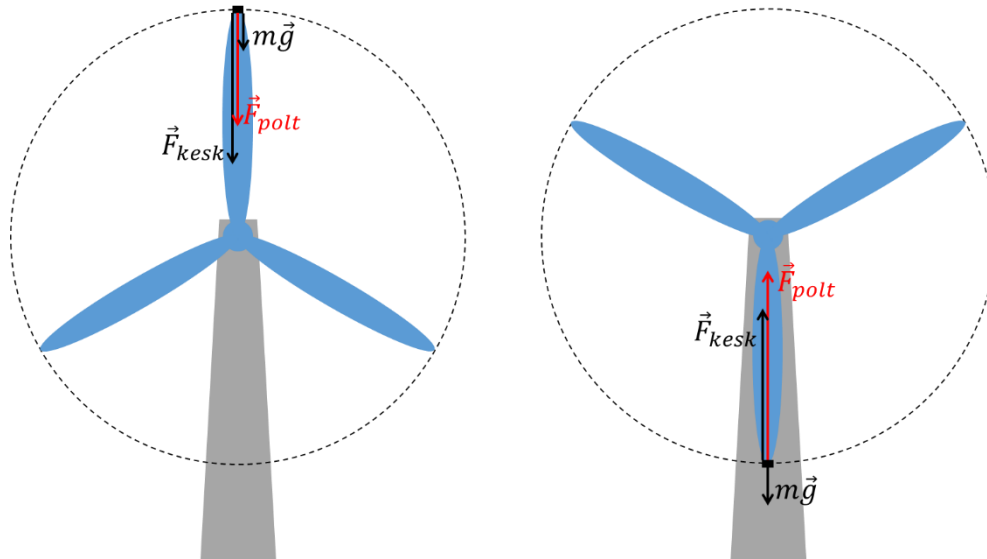
kus  $m$  on laba otsa kinnitatud keha mass ja  $d$  on trajektoori diameeter, mis ühtib tiiviku läbimõõduga. Paneme nüüd saadud võrrandisse sisse eelmise nädala seminari viimases ülesandes leitud tiiviku laba otsa kiiruse sõltuvuse tiiviku pöörlemisagedusest

$$v = \pi f d,$$

kus  $f$  on tiiviku pööremissagedus. Seega

$$F_{kesk} = m \frac{2v^2}{d} = m \frac{2\pi^2 f^2 d^2}{d} = 2md\pi^2 f^2 .$$

Nüüd tuleb kesktõmbejõu ja raskusjõu abil leida poltide poolt mõjuv jõud. Seejuures peab arvestama vektorite suundadega. Kesktõmbejõud on suunatud alati trajektoori keskpunkti poole. Seega erinevates trajektoori punktides on kesktõmbejõu suund erinev. Kesktõmbejõu absoluutväärtus ei muutu, kuna keha liigub konstantse kiirusega. Raskusjõud on suunatud alla poole. Vaatame kahte äärmist juhtu kõige ülemises ja alumises punktis. Joonistame neis punktides jõud välja ja tähistame joonisel otsitava poltide poolt avaldatava jõu punaselt.



Jooniselt näeme, et ülemises asendis on kesktõmbejõud ja raskusjõud samasuunalised ehk raskusjõud aitab keha hoida trajektooriga ja seega on poltidele mõjuv jõud väiksem. Seega moodulkujul avaldub poltide jõud järgmiselt

$$\begin{aligned} F_{polt, \text{üleval}} &= F_{kesk} - mg = 2md\pi^2 f^2 - mg = \\ &= 2 \cdot 1,0 \text{ kg} \cdot 100 \text{ m} \cdot 3,142^2 \cdot (0,30 \text{ Hz})^2 - 1,0 \text{ kg} \cdot 9,807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,17 \text{ kN} . \end{aligned}$$

Alumises asendis on aga kesktõmbejõud ja raskusjõud vastassuunalised ehk poldid peavad hoidma keha trajektooriga ja ka raskusjõu ära kompenseerima. Seega poltide poolt kehale mõjuv jõud avaldub moodulkujul järgmiselt

$$\begin{aligned} F_{polt, \text{all}} &= F_{kesk} + mg = 2md\pi^2 f^2 + mg = \\ &= 2 \cdot 1,0 \text{ kg} \cdot 100 \text{ m} \cdot 3,142^2 \cdot (0,30 \text{ Hz})^2 + 1,0 \text{ kg} \cdot 9,807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,19 \text{ kN} . \end{aligned}$$

Need on kaks äärmist juhtu. Vahepealsetes asendites on poltide poolt kehale mõjuva jõu väärtus nende vahel. Soovitan teha joonis, kus tiivik on horisontaalasendis, ehk keha asub sama kõrgel kui tiiviku keskoht ja proovide ise seal kehale mõjuv jõud välja arvutada.

Lõppvastuseks on, et kehale mõjuv jõud jääb 0,17 kN ja 0,19 kN vahele.

## Ülesanne 6

Tähistame antud suurused:

$$a = 50 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \text{helikopteri ja auto kiirendus.}$$

$$m_{\text{kofter}} = 4,5 \text{ t} = 4,5 \cdot 10^3 \text{ kg} - \text{helikopteri mass,}$$

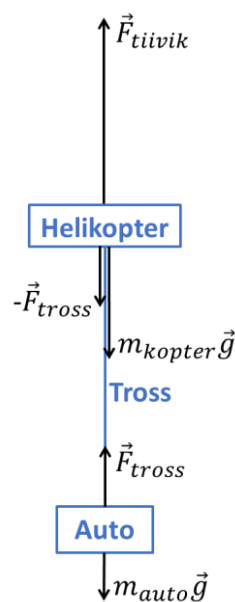
$$m_{\text{auto}} = 1,5 \text{ t} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ kg} - \text{auto mass.}$$

Meie käest küsitakse:

$F_{\text{tiivik}}$  – tiiviku tõstejõudu,

$F_{\text{tross}}$  – tõmbejõud helikopterit ja autot ühendavas trossis.

Teeme joonise ja kanname jõud peale.



Ülesande lahendamist võime alustada sellest küsimusest, mis tundub kõige lihtsam. Alustame lahendamist teisest küsimusest ehk tõmbejõust trossis. Selleks vaatame autole mõjuvaid jõudusid. Need on auto raskusjõud  $m_{\text{auto}}\vec{g}$  ja trossi tõmbejõud  $\vec{F}_{\text{tross}}$ . Rohkem jõudusid autole ei mõju, kui õhutakistust ei arvesta. Seega saame auto jaoks välja kirjutada Newtoni II seaduse. Kirjutame selle välja moodulkujul ja loeme positiivseks suunaks ülesliikumise suuna,

$$m_{\text{auto}}a = F_{\text{tross}} - m_{\text{auto}}g.$$

Avaldame siit trossi tõmbejõu ja arvutame selle ka välja

$$F_{\text{tross}} = m_{\text{auto}}(a + g) = 1,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \left(0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \approx 15 \text{ kN.}$$

Arvutame nüüd välja helikopteri tiiviku tõstejõu. Kuna tiivik tõstab nii helikopterit kui ka autot samaaegselt, siis võime neid vaadata koos, kui ühte „keha“. Sellele „kehale“ mõjub kaks jõudu, raskusjõud  $(m_{\text{kofter}} + m_{\text{auto}})\vec{g}$  ja tiiviku tõstejõud. Kirjutame nüüd selle „keha“ jaoks välja Newtoni II seaduse moodulkujul ja avaldame sealt tiiviku tõstejõu ning arvutame selle välja,

$$(m_{\text{kofter}} + m_{\text{auto}})a = F_{\text{tiivik}} - (m_{\text{kofter}} + m_{\text{auto}})g,$$



$$F_{\text{tiivik}} = (m_{\text{kopter}} + m_{\text{auto}})a + (m_{\text{kopter}} + m_{\text{auto}})g,$$

$$F_{\text{tiivik}} = (m_{\text{kopter}} + m_{\text{auto}})(a + g) =$$

$$= (4,5 \cdot 10^3 \text{ kg} + 1,5 \cdot 10^3 \text{ kg}) \cdot \left(0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 9,807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \approx 62 \text{ kN}.$$

Samale tulemusle jõuaksime ka, kui me kirjutaksime Newtoni II seaduse välja ainult helikopterile. Helikopterile mõjuks siis kolm jõudu: raskusjõud, trossi tõmbejõud ja tiiviku tõstejõud. Soovitan seda iseseisvalt proovida teha.

Lõppvastuseks saame, et tiiviku tõstejõud on 62 kN ja trossi tõmbejõud on 15 kN.

### **Iseseisvaks lahendamiseks jäätud ülesannete vastused**

**Ülesanne iseseisvaks lahendamiseks 1** – Vastus: 8,2 kN.

**Ülesanne iseseisvaks lahendamiseks 2** – Vastus: 1,19 m/s<sup>2</sup> ja 511 kg.

**Ülesanne iseseisvaks lahendamiseks 3** – Vastus: 20 m.

**Ülesanne iseseisvaks lahendamiseks 4** – Vastus: 1,2 m/s.

**Ülesanne iseseisvaks lahendamiseks 5** – Vastus: 8 m/s.

**Ülesanne iseseisvaks lahendamiseks 6** – Vastus: 1,4 korda.