MHK0120 Sissejuhatus mehhatroonikasse

5. nädala praktikumide ülesannete lahendused

Soovitan väga enne lahenduste vaatamist ise proovida ülesandeid lahendada.

Tihti saab ülesannet mitut moodi lahendada, kuid lõppvastus peab alati olema sama.

Ülesanne 1

Tähistame antud suurused:

$m = 600\ \mathrm{kg}$ – võlli mass,

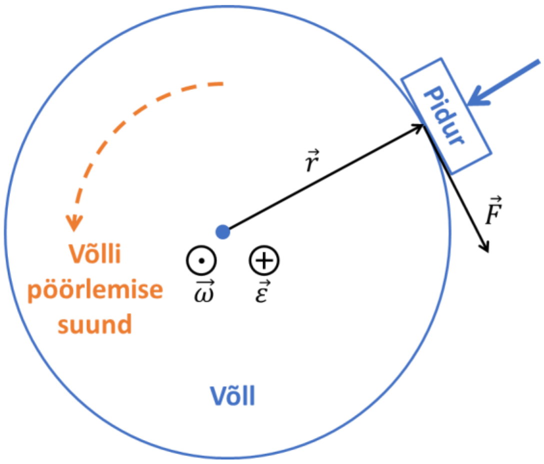
$r = 12{,}0\ \mathrm{cm} = 0{,}120\ \mathrm{m}$ – võlli raadius,

$f_0 = 540\ \mathrm{min}^{-1} = 9{,}00\ \mathrm{Hz}$ – võlli algne pöörlemissagedus,

$N = 20{,}0$ – enne seisma jäämist tehtavate täispöörete arv.

Meie käest küsitakse pidurdavat jõudu F.

Teeme joonise.



Kui võll pöörleb vastupäeva, siis nurkkiirus $\vec{\omega}$ on suunatud joonisest välja. Pidurdav nurkkiirendus $\vec{\varepsilon}$, peab sellisel juhul olema suunatud joonise sisse, kuna peab olema vastupidise suunaga võrreldes nurkkiirusega.

Pidurdav jõud $\vec{F}$ on alati vastupidine liikumise suunale ja antud juhul on see pikki võlli pinna puutujat. Selleks, et leida võlli pöörlemist pidurdavat jõudu, tuleb meil leida vastava jõu jõumoment $\vec{M}$. Jõumomendi leidmiseks on vaja teada jõuõlga. Antud juhul on võlli raadius $\vec{r}$ ühtlasi ka jõuõlaks. Kirjutame jõumomendi välja jõu ja nurkkiirenduse kaudu.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon},$$

kus I on võlli inertsmoment. Kuna $\vec{r}$ ja $\vec{F}$ on üksteisega risti, siis saame üle minna moodulkujule ja vektorkorrutise mooduli valemis olev vektorite vahelise nurga siinus on $\sin 90\,° = 1$. Seega

$$M = rF = I\varepsilon.$$

Avaldame siit jõu

$$F = \frac{I\varepsilon}{r}.$$

Selleks, et siit valemist jõudu leida on vaja teada nurkkiirendust ja inertsmomenti. Eeldades, et pidur surutakse vastu võlli konstantse jõuga, siis peab ka nurkkiirendus olema konstantne. Seega kasutame konstantse nurkkiirendusega liikumise valemeid moodulkujul ja loeme algse pöördenurga võrdseks nulliga,

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_{lõpp} - \omega_0}{t},$$

kus $\omega_{lõpp}$ on võlli lõppnurkkiirus, mis on 0. Avaldades viimasest valemist aja ja pannes selle eelviimasesse valemisse, saame

$$\varphi = -\omega_0 \frac{\omega_0}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon \omega_0^2}{2\varepsilon^2} = -\frac{\omega_0^2}{\varepsilon} + \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = -\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon},$$

Arvestame nüüd, et üks täispööre on 2π radiaani, siis saame pöördenurga siduda täispöörete arvuga$N$ järgmiselt $\varphi = 2\pi N$. Lisaks peame teadma seost algse nurkkiiruse ja pöörlemissageduse f_0 vahel $\omega_0 = 2\pi f_0$. Paneme need kaks avaldist viimasesse valemisse ja avaldame sealt nurkkiirenduse,

$$2\pi N = -\frac{(2\pi f_0)^2}{2\varepsilon},$$

$$\varepsilon = -\frac{(2\pi f_0)^2}{4\pi N},$$

$$\varepsilon = -\frac{\pi f_0^2}{N}.$$

Vaatame nüüd inertsmomenti. Millise kujundiga võiks võll sarnaneda? Kõige sarnasem võiks võll olla seest täis silindriga. Seega kasutame võlli inertsmomendi arvutamiseks seest täis silindri inertsmomendi valemit

$$I = \frac{mr^2}{2}.$$

Kuna võlli massi ja raadiust me teame, siis saame inertsmomendi valemi ja nurkkiirenduse valemi panna jõu valemisse ja jõu välja arvutada. Meid huvitab jõu moodul ehk jõu absoluutväärtus

$$|F| = \left| -\frac{\frac{mr^2}{2}\frac{\pi f_0^2}{N}}{r} \right| = \frac{mr^2 \pi f_0^2}{2rN} = \frac{mr\pi f_0^2}{2N} = \frac{600\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}120\ \mathrm{m} \cdot 3{,}1416 \cdot (9{,}00\ \mathrm{Hz})^2}{2 \cdot 20{,}0} \approx 458\ \mathrm{N}.$$

Lõppvastuseks saame, et võlli pidurdati jõuga 458 N.

Ülesanne 2

Tähistame antud suurused:

$f_1 = 0{,}50\ \mathrm{Hz}$ – pingi algne pöörlemissagedus,

$I_{keha} = 2{,}5\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$ – pingi ja inimese keha inertsmoment,

$m = 2{,}0\ \mathrm{kg}$ – ühe hantli mass,

$d_1 = 1{,}6\ \mathrm{m}$ – hantlite vaheline kaugus alguses,

$d_2 = 0{,}60\ \mathrm{m}$ – hantlite vaheline kaugus lõpus,

Meie käest küsitakse f_2 – sagedus, millega pink pöörleb peale käte langetamist.

Kui masside asukoht muutub ja selle tulemusena muutub pöörlemiskiirus, siis on tegemist impulssmomendi jäävuse seadusega. Süsteemi (pink, inimese keha ja raskused) impulssmoment enne käte langetamist L_1 peab olema sama suur kui süsteemi impulssmoment peale käte langetamist L_2 ehk

$$L_1 = L_2.$$

Kuna pöörlemise sund ei muutu, siis saime jäävusseaduse kohe välja kirjutada moodulkujul. Süsteemi impulssmoment on süsteemi inertsmomendi ja nurkkiiruse korrutis ja seega avaldub impulssmomendi jäävuse seadus järgmiselt

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

kus I_1 ja I_2 on süsteemi inertsmomendid enne ning peale käte langetamist ja ω_1 ja ω_2 on nurkkiirused enne ja peale käte langetamist. Arvestades, et alg ja lõppnurkkiiruste ning alg ja lõppsageduste vahel on seosed $\omega_1 = 2\pi f_1$ ja $\omega_2 = 2\pi f_2$, saame impulssmomendi jäävusseaduse lahti kirjutada

$$I_1 2\pi f_1 = I_2 2\pi f_2,$$

$$I_1 f_1 = I_2 f_2.$$

Avaldame siit f_2, mida meie käest küsitakse

$$f_2 = \frac{I_1}{I_2} f_1.$$

Nüüd on vaja leida inertsmomendid. Koguinertsmomendi saame, kui liidame kokku üksikute osade inertsmomendid. Kuna hantlite mõõtmete kohta ei ole midagi öeldud, kuid need võiksid olla oluliselt väiksemad, kui nende vaheline kaugus, siis loeme neid punktmassideks. Seega ühe hantli inertsmoment on mr^2, kus r on hantli kaugus pöörlemisteljest. Antud juhul oleks hantli kaugus pöörlemisteljest pool hantlite vahelisest kaugusest. Seega kogu inertsmoment enne käte langetamist oleks

$$I_1 = I_{keha} + mr^2 + mr^2 = I_{keha} + 2m\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = I_{keha} + \frac{md_1^2}{2}.$$

Analoogiliselt saame süsteemi inertsmomendi peale käte langetamist

$$I_2 = I_{keha} + \frac{md_2^2}{2}.$$

Paneme need inertsmomendid eespool leitud sageduse valemisse ja arvutame lõppsageduse välja

$$f_2 = \frac{I_1}{I_2} f_1 = \frac{I_{keha} + \frac{md_1^2}{2}}{I_{keha} + \frac{md_2^2}{2}} f_1 = \frac{2{,}5\ \mathrm{kg \cdot m^2} + \frac{2{,}0\ \mathrm{kg} \cdot (1{,}6\ \mathrm{m})^2}{2}}{2{,}5\ \mathrm{kg \cdot m^2} + \frac{2{,}0\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}60\ \mathrm{m})^2}{2}} \cdot 0{,}50\ \mathrm{Hz} \approx 0{,}88\ \mathrm{Hz}.$$

Lõppvastuseks saame, et pink hakkas pöörlema sagedusega 0,88 Hz.

Ülesanne 3

Andmed on antud eraldi failina. Arvutusteks oleks vaja veel teada ka ratta ümbermõõtu. Seda ei ole algandmetes antud. Olgu ratta läbimõõt $d = 69 \text{ cm}$.

Proovige seda ülesannet ise lahendada selleks tuleks kasutada, kas mõnda tabelarvutusprogrammi nagu näiteks Excel või ise kirjutada endale sobivas programmeerimiskeeles programm. Selle ülesande kohta toon ära vastused. Kui teil küsimusi tekib, siis vastan nendele hea meelega konsultatsioonis.

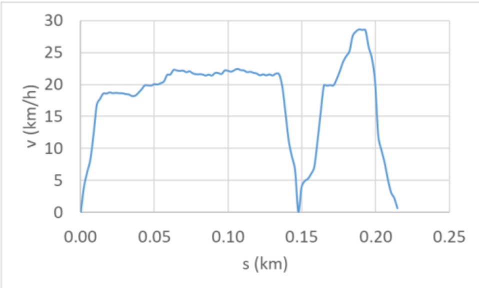
Teekonna pikkus 0,215 km

Sõiduaeg ühes peatustega on 00.02.46 ja ilma peatuste aega arvestamata 00.01.07.

Keskmine kiirus peatuste aega arvestades on 4,7 km/h ja peatuste aega mitte arvestades on 11,5 km/h.

Maksimaalne kiirus 28,6 km/h.

Kiiruse ja teepikkuse graafik näeks välja järgmine.



Ülesanne 4

Tähistame antud suurused:

$f = 5{,}00 \text{ Hz}$ – hooratta algne pöörlemissagedus,

$M = 981 \text{ N} \cdot \text{m}$ – pidurdava jõu jõumoment,

$t = 20{,}0 \text{ s}$ – aeg, mis kulus hooratta peatamiseks.

Vaja on leida I – hooratta inertsmoment.

Kasutame pöördliikumise põhiseadust moodulkujul

$$M = I\varepsilon,$$

kus M on hoorattale mõjuv jõumoment, I on hooratta inertsmoment ja ε on hooratta nurkkiirendus. Kuna jõumoment on konstantne siis ka nurkkiirendus on konstantne. Seega saame kasutada keskmise nurkkiirenduse valemit,

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t},$$

kus $\Delta\omega$ on nurkkiiruse muutus ja t on selleks kulunud aeg. Kuna hooratta lõppkiirus on null, siis nurkkiiruse muutus on sama suur kui algne nurkkiirus. Lisaks on vaja teada, et sagedus f on seotud nurkkiirusega järgmise valemiga $\omega = 2\pi f$. Asendame nurkkiirenduse valemis nurkkiiruse sagedusega ja paneme nurkkiirenduse valemi pöördliikumise põhiseadusesse. Saame inertsmomendi välja arvutada

$$I = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{Mt}{2\pi f} = \frac{981\ \mathrm{N{\cdot}m{\cdot}20{,}0\ s}}{2{\cdot}3{,}1416{\cdot}5{,}00\ \mathrm{Hz}} \approx 625\ \mathrm{kg \cdot m^2}.$$

Lõppvastuseks saame, et hooratta inertsmoment oli 625 kg·m^2.

Ülesanne 5

Tähistame antud suurused:

$L = 1{,}0\ \mathrm{m}$ – varda pikkus,

$d = 1{,}2\ \mathrm{cm} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$ – varda läbimõõt,

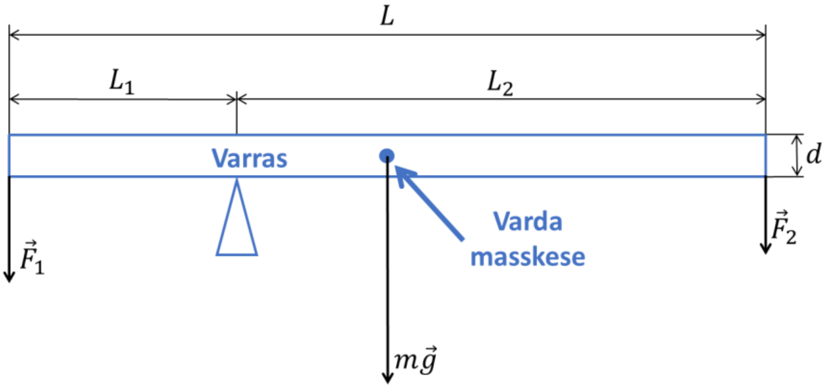
$m = 1{,}2\ \mathrm{kg}$ – varda mass,

$L_1 = 30\ \mathrm{cm} = 0{,}30\ \mathrm{m}$ – toetuspunkti kaugus varda otsast,

$F_1 = 0{,}45\ \mathrm{N}$ – jõud, millega tõmmatakse alla varda lühemat poole otsa.

Meie käest küsitakse F_2 – jõudu, millega tuleb teist varda otsa alla tõmmata.

Teeme joonise.



Selleks, et varras oleks tasakaalus, peavad jõumomentide summa olema null. Jõumomendid tuleb leida pöörlemistelje suhtes, milleks on antud juhul varda toetuspunkt. Kuna varras on horisontaalses asendis ja jõud mõjub vertikaalsuunas, siis vektorkorrutises olev nurk jõuõla ja jõu vahel on täisnurk ja $\sin 90\,° = 1$. Seega jõumomentide väljakirjutamisel moodulkujul võime selle liikme ära jätta.

Vasakul pool toetuspunkti on ainult üks jõud $\vec{F}_1$, millega varda otsa tõmmatakse alla. Selle jõu poolt põhjustatud jõumoment $\vec{M}_1$ avaldub moodulkujul

$$M_1 = L_1 F_1,$$

kus L_1 on varda otsa kaugus toetuspunktist. Paremal pool toetuspunkti mõjub kaks jõudu. $\vec{F}_2$ on jõud, mida peame varda teisele otsale rakendama, et varras tasakaalus oleks ja varda raskusjõud $m\vec{g}$, mille saame lugeda koondunuks varda masskeskmesse. Kirjutame nende jõudude jõumomendid $\vec{M}_2$ ja $\vec{M}_g$ välja

$$M_2 = L_2 F_2 = (L - L_1)F_2,$$

$$M_g = \left(\frac{L}{2} - L_1\right) mg,$$

kus L_2 on varda teise otsa kaugus toetuspunktist, L on varda pikkus, m on varda mass ja g on raskuskiirendus. Masskese võiks olla varda keskpunktis ehk siis $\frac{L}{2} - L_1$ kaugusel varda toetuspunktist.

Kuna paremal pool toetuspunkti olevate jõudude jõumoment $\vec{M}_1$ ja vasakul pool toetuspunkti olevate jõudude jõumomendid $\vec{M}_g$ ja $\vec{M}_2$ pööravad varrast erinevat pidi siis saame kirjutada jõumomentide summa moodulkujul välja järgmiselt

$$M_1 - M_g - M_2 = 0,$$

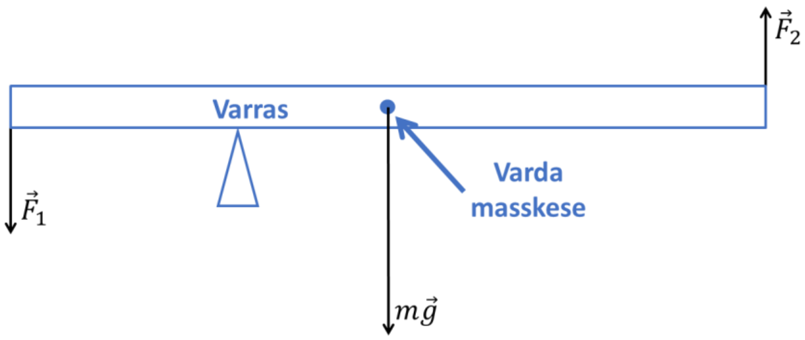
$$M_1 = M_g + M_2,$$

$$L_1 F_1 = \left(\frac{L}{2} - L_1\right) mg + (L - L_1) F_2.$$

Avaldame nüüd siit küsitud suuruse F_2 ja arvutame selle välja.

$$F_2 = \frac{L_1 F_1 - \left(\frac{L}{2} - L_1\right) mg}{L - L_1} = \frac{0{,}30\,m \cdot 0{,}45\,N - \left(\frac{1{,}0\,m}{2} - 0{,}30\,m\right) \cdot 1{,}2\,kg \cdot 9{,}807 \frac{m}{s^2}}{1{,}0\,m - 0{,}30\,m} \approx -3{,}2\text{ N}.$$

Nüüd on tekkinud viga, sest jõu moodul ei saa olla negatiivne. Järelikult jõud F_2 ei tõmba mitte varrast alla, nagu joonisel eeldatud vaid peab hoopis varrast tõstma. Seega peaksid jõu suunad olema joonisel järgmised.



Jõumomentide moodulite summa ja lõppvalem peaksid seega avalduma järgmiselt

$$M_1 - M_g + M_2 = 0,$$

$$M_1 = M_g - M_2,$$

$$L_1 F_1 = \left(\frac{L}{2} - L_1\right) mg - (L - L_1) F_2,$$

$$F_2 = -\frac{L_1 F_1 - \left(\frac{L}{2} - L_1\right) mg}{L - L_1} = -\frac{0{,}30\,m \cdot 0{,}45\,N - \left(\frac{1{,}0\,m}{2} - 0{,}30\,m\right) \cdot 1{,}2\,kg \cdot 9{,}807 \frac{m}{s^2}}{1{,}0\,m - 0{,}30\,m} \approx 3{,}2\text{ N}.$$

Nagu näeme, siis varda paksust d ei läinud vaja.

Lõppvastuseks saame, et teist otsa tuleb tõsta jõuga 3,2 N.

PS! Kui varda massi ei oleks arvestanud, siis oleks tulnud jõud $\vec{F}_2$ alla suunatuna ja tema väärtus oleks olnud 0,19 N.

Ülesanne 6

Meie käest küsitakse, mitu korda hakkab maakera kiiremini pöörlema ehk siis mitu korda läheb Maa nurkkiirus suuremaks. Kuna keha nurkkiirus ω ja joonkiirus v on omavahel seotud lineaarselt

$$\omega = \frac{v}{r},$$

siis võime nurkkiiruste suhte asemel leida ka joonkiiruste suhte. r on trajektoori raadius ehk antud juhul Maa raadius.

Leiame kõigepealt kui suure joonkiirusega v_1 liiguvad praegu ekvaatoril olevad punktid. Kuna maakera pöörleb konstantse nurkkiirusega, siis saame kasutada keskmise kiiruse valemit

$$v_1 = \frac{s}{t},$$

kus s on teepikkus ja t sellele teepikkuse läbimiseks kulunud aeg. Sobiv teepikkus võiks olla Maa ümbermõõt $s = 2\pi r$ ja aeg Maa pöörlemise periood.

Keha kaal muutub ekvaatoril nulliks, kui Maa pöörlemisest tingitud ringjoonelise liikumise normaalkiirendus a_n on võrdne raskuskiirendusega g. Kasutame 3. nädalal 1. isesvaks lahendamiseks jäätud ülesandes antud valemit, mida paluti teil tuletada,

$$a_n = g = \frac{v_2^2}{r},$$

kus v_2 on keha joonkiirus, kui keha kaal on ekvaatoril null ja r trajektoori raadius, mis antud juhul ühtib Maa raadiusega.

Avaldame mõlemal juhul kiiruse ja leiame kiiruste suhte

$$v_1 = \frac{2\pi r}{t},$$

$$v_2 = \sqrt{rg},$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{t\sqrt{rg}}{2\pi r} = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}$$

Tundmatutena on meil Maa pöörlemise periood (24 h) ja Maa raadius. Viimane tuleks teil ise leida ($6{,}4 \cdot 10^3$ km). Paneme nüüd arvud sisse ja arvutame kiiruste suhte välja

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{24\cdot 3600\ \mathrm{s}}{2\cdot 3{,}142}\sqrt{\frac{9{,}807\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{6{,}4\cdot 10^6\ \mathrm{m}}} \approx 17.$$

Leiame nüüd sellisel juhul ööpäeva pikkuse. Kui Maa pöörleb 17 korda kiiremini, siis ööpäev peaks olema 17 korda lühem ehk

$$\frac{24\ \mathrm{h}}{17} \approx 1{,}4\ \mathrm{h}.$$

Lõppvastuseks saame, et Maa peaks pöörlema 17 korda kiiremini ja siis olek ööpäeva pikkuseks 1,4 h.

Ülesanne 7

Selleks tuleb leida, mitu protsenti moodustab 1 sekund kogu nädala sekundite arvust,

$$\frac{1\ \mathrm{s}}{7\cdot 24\cdot 3600\ \mathrm{s}} \approx 0{,}00017\ \%\ .$$

Lõppvastuseks saame, et kvartsi ebatäpsus peab olema väikse kui $0{,}00017\ \%$.