EEM3010 Sissejuhatus mehhatroonikasse

6. nädala praktikumi ülesannete lahendused

Soovitan väga enne lahenduste vaatamist ise proovida ülesandeid lahendada.

Tihti saab ülesannet mitut moodi lahendada, kuid lõppvastus peab alati olema sama.

Ülesanne 1

Tähistame antud suurused:

$P = 8820\ \mathrm{N}$ – rammi kaal,

$h = 1{,}50\ \mathrm{m}$ – rammi langemiskõrgus,

$x = 3{,}0\ \mathrm{cm} = 0{,}030\ \mathrm{m}$ – vai nihkub iga löögiga nii palju sügavamale,

Meie käest küsitakse keskmist jõudu F.

Eeldame, et vaia ja rammi kokkupõrke käigus energiat kaotsi ei lähe. Seda ülesannet on lihtne lahendada energiate kaudu. Ülemises asendis on rammil potentsilaane energia. See muutub alla kukkudes kineetiliseks energiaks ja edasi läheb vaia maasse löömise tööks. Tööd teeme selle arvelt, et ületame maapinna takistusjõudu vaiale.

Potentsiaalse energia muut ΔE_{pot} avaldub

$$\Delta E_{pot} = mg(h + x),$$

kus m on rammi mass, g on raskuskiirendus, h on rammi langemise kõrgus ja x on teepikkus, kui palju vai läheb maasse. Valemis on $h + x$ kuna nii palju liigub ramm allapoole löögi jooksul. Rammi kaal P ongi antud juhul võrdne raskusjõuga ehk nii tugevalt ramm tõmbab trossi, mille otsas ta enne kukkumist ripub,

$$P = mg.$$

Kukkumise ajal on ramm arvatavasti kaaluta olekus ja seega siis on rammi kaal null.

Kogu potentsiaalse energia muut peab minema vaia sisse löömise tööks ehk takistuse ületamiseks. Töö avaldub järgmiselt

$$A = Fx,$$

kus F on keskmine pidurav jõud, mida meie käest küsitakse ja x on teepikkus, mille võrra vai maa sisse läheb. Kuna vaatame töö absoluutväärtust ja jõud ning teepikkus on samasihilised, siis nende vektorite vahelise nurga koosinus on üks ja seda valemisse ei kirjutanud. Pannes nüüd potentsiaalse energia muudu ja töö võrduma, saame avaldada keskmise jõu ja selle välja arvutada,

$$\Delta E_{pot} = A,$$

$$mg(h + x) = Fx,$$

$$F = \frac{mg(h+x)}{x} = \frac{P(h+x)}{x} = \frac{8820\ \mathrm{N}(1{,}50\ \mathrm{m}+0{,}030\ \mathrm{m})}{0{,}030\ \mathrm{m}} \approx 4{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{N}.$$

Lõppvastuseks saame, et keskmine jõud on $4{,}5 \cdot 10^5$ N.

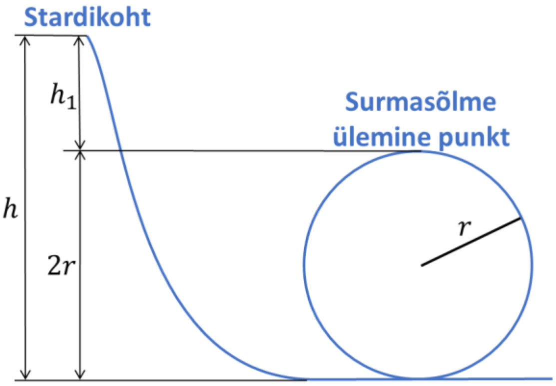
Ülesanne 2

Tähistame antud suurused:

$r = 8{,}0\ \mathrm{m}$ – trampliini raadius,

Meie käest küsitakse h – trampliini kaldpinna kõrgust.

Teeme selgitava joonise



Rattur alustab sõitu kaldpinna ülemisest osast ja peale hoovõttu peab tegema surmasõlme. Seega on meil vaja teada, kui suur peab olema ratturi kiirus v surmasõlme kõige ülemises punktis, et ta alla ei kukuks. Kiirus peab olema nii suur, et kesktõmbe- ehk normaalkiirendus a_n oleks suurem või võrdne raskuskiirendusega g. Valemi kujul on see

$$a_n = \frac{v^2}{r} \geq g,$$

kus r on trajektoori raadius ehk antud juhul surmasõlme raadius ja v on ratta kiirus kõige ülemises punktis.

Kiiruse leidmiseks antud punktis kasutame energia jäävuse seadust. Ratturil on trampliini kaldpinna ülemises punktis raskusjõu potentsiaalne energia, mis alla sõites muutub kineetiliseks energiaks. Jõudnud trampliini kõige alumisse punkti on tal kõige suurem kineetiline energia. Nüüd mööda trampliini surmasõlme üles sõites kineetiline energia taas väheneb ja muutub potentsiaalseks energiaks. Tänu energia jäävusele ei pea me teadma, kui palju kineetiline energia muutub raskusjõu potentsiaalseks energiaks ja tagasi trampliini peal. Meil piisab teada, kui suur on potentsiaalsete energiate vahe trampliini stardipunktis ja surmasõlme ülemises punktis. See potentsiaalsete energiate vahe peab olema ratturi kineetiline energia surmasõlme kõige ülemises punktis ehk

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2},$$

$$gh_1 = \frac{v^2}{2},$$

kus h_1 on kõrguste vahe stardipunkti ja surmasõlme ülemise punkti vahel ja m on ratturi mass. Nagu valemitest näeme, siis ratturi mass taandub välja, kuna takistusjõudusid me ei arvesta. Avaldame viimasest valemist ratturi kiiruse ruudu

$$v^2 = 2gh_1.$$

Paneme selle normaalkiirenduse valemisse sisse. Seejuures piirjuhul peab normaalkiirendus olema võrdne raskuskiirendusega ja avaldame h_1,

$$g = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{2gh_1}{r},$$

$$rg = 2gh_1,$$

$$h_1 = \frac{r}{2}.$$

Arvestades, et trampliini stardipunkti kõrgus h on h_1 ja $2r$ summa, siis saame lõppvalemi ja arvutame kõrguse välja,

$$h = h_1 + 2r = \frac{r}{2} + 2r = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot 8{,}0\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{m}.$$

Lõppvastuseks saame, et kaldpinna minimaalne kõrgus peab olema vähemalt 20 m.

Ülesanne 3

Keskmine võimus P avaldub energia E jagatuna selle kulutamise ajaga t. Sobivaks ajaks võiks olla üks ööpäev (24 h)

Inimese keskmise võimsuse leidmiseks tuleb teada inimese energiakulu. Interneti andmetel peab keskmine inimene söögist saama 2000-2500 kcal energiat päevas. Võtame selle vahemiku keskmise väärtuse ehk 2250 kcal. Üks kalor (1 cal) on energia, mis kulub ühe grammi vee temperatuuri tõstmiseks 1 kraadi võrra. Seega üks kilokalor (1 kcal) on energia hulk, mis kulub ühe kilogramm vee temperatuuri tõstmiseks ühe kraadi võrra. See on võrdne vee erisoojusega, mis samuti näitab, kui palju energiat tuleb veele anda, et ühe kilogrammi vee temperatuuri tõsta ühe kraadi võrra. Vee erisoojus on 4,2 kJ/(kg·K). Seega keskmine päevane energiakogus E on

$$E = 2250 \cdot 4{,}2\ \mathrm{kJ}.$$

Nüüd saame keskmise võimuse avaldada järgmiselt

$$P = \frac{E}{t} = \frac{2250 \cdot 4{,}2\ \mathrm{kJ}}{24 \cdot 3600\ \mathrm{s}} \approx 0{,}1\ \mathrm{kW}.$$

Lõppvastus inimese keskmine võimsus on 0,1 kW.

PS! Enamus sellest energiast eraldub soojusena, nii et näiteks ruumi jahutuse planeerimisel võib igat inimest vaadata, kui keskmiselt 0,1 kW küttekeha. Kuna tegemist on ligikaudse hinnanguga, siis anname vastuse erandkorras ühe tüvenumbriga.

Ülesanne 4

Tähistame antud suurused:

$m_u = 70\ \mathrm{kg}$ – uisutaja mass,

$m_k = 3{,}0\ \mathrm{kg}$ – kivi mass,

$v_k = 8{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ – kivi kiirus peale viset,

$\mu = 0{,}020$ – hõõrdetegus uiskude ja jää vahel,

$t = -5{,}2$ °C –temperatuur õues.

Meie käest küsitakse, et kui kaugele libiseb uisutaja ehk teepikkust s.

Uisutaja hakkab liikuma täna impulsi jäävuse seadusele. Algselt seisab uisutaja paigal ja seega algne impulss on 0. Peale kivi viskamist peab uisutaja impulss $\vec{p}_u$ ja kivi impulsi $\vec{p}_k$ summa võrduma algse impulsiga ehk nulliga,

$$0 = \vec{p}_u + \vec{p}_k.$$

Seega peavad need kaks impulsi vektorit olema vastassuunalised ja moodulilt samasuured. Seega moodulkujul saame kirjutada

$$p_u = p_k,$$

$$m_u v_u = m_k v_k,$$

kus m_u on uisutaja mass, v_u on uisutaja kiirus vahetult peale kivi viskamist, m_k on kivi mass ja v_k on kivi kiirus vahetult peale kivi viskamist. Siit saame leida uisutaja kiiruse vahetult peale kivi viskamist,

$$v_u = \frac{m_k v_k}{m_u}.$$

Uisutaja algkiirus on meil käes, vaatame nüüd kui kaugele uisutaja libiseb peale kivi viskamist. Üks võimalus oleks seda leida konstantse kiirendusega liikumiste valemitest. Proovime siin leida seda aga töö ja energia järgi. Uisutaja kineetiline energia peale kivi viskamist on

$$E_{kin} = \frac{m_u v_u^2}{2}.$$

See peab minema hõõrdejõu tööks A, et uisutaja seisma jääks. Hõõrdejõu töö avaldub moodulkujul järgmiselt

$$A = F_h s,$$

kus F_h on hõõrdejõud, s on uisutaja läbitud teepikkus enne seismajäämist. Kui jää on horisontaalne, siis hõõrdejõu valemis pindu kokkusuruvaks jõuks on raskusjõud ja seega saame hõõrdejõu välja kirjutada järgmiselt

$$F_h = \mu m_u g,$$

kus μ on hõõrdetegur ja g on raskuskiirendus. Paneme nüüd hõõrdejõu töö ja uisutaja kineetilise energia peale kivi viskamist võrduma ja asendame sinna sisse hõõrdejõu väärtuse ning avaldame teepikkuse

$$A = E_{kin},$$

$$F_h s = \frac{m_u v_u^2}{2},$$

$$\mu m_u g s = \frac{m_u v_u^2}{2},$$

$$s = \frac{v_u^2}{2\mu g}.$$

Paneme siia sisse ka eespool impulsi jäävuse seadusest leitud uisutaja kiiruse väärtuse peale kivi viskamist ning arvutame välja uisutaja teepikkuse,

$$s = \frac{v_u^2}{2\mu g} = \frac{\left(\frac{m_k v_k}{m_u}\right)^2}{2\mu g} = \frac{m_k^2 v_k^2}{2\mu g m_u^2} = \frac{(3{,}0\ \mathrm{kg})^2 \cdot \left(8{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}020 \cdot 9{,}807\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (70\ \mathrm{kg})^2} \approx 0{,}30\ \mathrm{m}.$$

Lõppvastuseks saame, et uisutaja libiseb tagasi 0,30 m.

PS! Nagu näha, siis temperatuuri ei läinud selle ülesande lahendamiseks vaja.

Ülesanne 5

Tähistame antud suurused:

$V = 50\ \mathrm{L} = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$ – bensiinipaagi ruumala,

$Q_b = 12\ \frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{kg}}$ – bensiini kütteväärtus,

$\varrho = 0{,}71\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 7{,}1 \cdot 10^2\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ – bensiini tihedus,

$\mu_b = 30\ \%$ – bensiinimootori kasutegur,

$\mu_e = 90\ \%$ – elektrimootori kasutegur.

Meie käest küsitakse kui palju energiat mahutab aku E_a.

Kuna bensiini kütteväärtus on antud kilogrammi kohta, siis tuleb leida, kui mitu kilogrammi bensiini on bensiinipaagis. Seda saame leida läbi bensiini tiheduse ϱ,

$$m = \varrho V,$$

kus m on bensiinipaagis oleva bensiini mass ja V on bensiinipaagi ruumala.

Paagitäie bensiini põletamisel bensiinimootori poolt tehtud kasuliku töö A_b saame, kui leiame kui palju energiat eraldub paagitäie bensiini põletamisel ja korrutame selle veel ka bensiinimootori kasuteguriga μ_b,

$$A_b = m Q_b \mu_b = \varrho V Q_b \mu_b,$$

kus Q_b on bensiini kütteväärtus, mis näitab, kui palju energiat saab ühe kilogrammi bensiini põletamisel.

Leiame nüüd elektrimootori poolt tehtud kasuliku töö A_e, kui kasutada on üks täislaetud aku,

$$A_e = E_a \mu_e,$$

kus E_a on akusse salvestatud energia ja μ_e on elektrimootori kasutegur. Pannes need elektrimootori ja bensiinimootori kasulikud tööd võrduma saame leida, kui suur peaks olema aku mahutavus, et saada sõita sama kaugele, kui etteantud koguse bensiiniga,

$$A_e = A_b,$$

$$E_a \mu_e = \varrho V Q_b \mu_b,$$

$$E_a \mu_e = \frac{\varrho V Q_b \mu_b}{\mu_e} = \frac{7{,}1 \cdot 10^2\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^3 \cdot 12\ \frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{kg}} \cdot 0{,}30}{0{,}90} \approx 1{,}4 \cdot 10^2\ \mathrm{kWh}.$$

Lõppvastuseks saame, et aku mahutavus peaks olema vähemalt $2 \cdot 10^2$ kWh.

PS! Kuna tegemist on väga lihtsustatud eeldustega, et auto on täpselt sama, ei ole arvestatud igasuguste lisaenergiakadudega jne, siis anname siin vastuse ainult ühe tüvenumbri täpsusega. Lisaks selleks, et kindlasti saaks nii palju sõita, siis anname vastuse ülespoole ümardatuna.

<u>Ülesanne 6</u>

Tähistame antud suurused:

$P = 60\ \mathrm{W}$ – protsessori toitevoolu võimsus,

Meie käest küsitakse, kui palju energiat ajaühikus tuleb protsessorilt ära juhtida, et ei tekiks ülekuumenemisohtu.

Loeme andmevahetustega saadud ja ära antud energiahulgad piisavalt väikesteks, et neid me ei pea esialgu arvestama. Protsessori võimsus näitab, kui palju energiat tuleb protsessorile anda, et see töötaks. Võimsus 60 W tähendab, et igas sekundis antakse protsessorile energiat 60 J. Selleks, et protsessor üle ei kuumeneks peame me ära juhtima sama palju energiat ehk igas sekundis 60 J, mis teeb jahuti jahutusvõimsuseks 60 W. Reaalses elus on alati soovitatav kasutada suurema jahutusvõimsusega jahutit, kui protsessori enda võimsus.

Lõppvastuseks saame, et protsessorilt tuleb ära juhtida energiat võimsusega 60 W.