EEM3010 Sissejuhatus mehhatroonikasse

2. nädala ülesannete (praktikumi ja iseseisvaks lahendamiseks) lahendused/vastused

Soovitan väga enne lahenduste vaatamist ise proovida ülesandeid lahendada.

Tihti saab ülesannet mitut moodi lahendada, kuid lõppvastus peab alati olema sama.

Praktikumi ülesannete lahendused

Ülesande 1 lahendus

Tähistame antud suurused:

$v_1 = 50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ – auto kiirus esimesel poolel teel,

$v_2 = 90\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ – auto kiirus esimesel poolel teel,

Meie käest küsitakse v_k – auto keskmine kiirus kogu teekonna vältel.

Siin tuleb teada, mis on keskmine kiirus. Kindlasti ei ole keskmine kiirus kiiruste aritmeetiline, mediaan ega ka mõni muu matemaatiline keskmine. Keskmine kiirus on kogu teepikkus s jagatud selle läbimiseks kulunud ajaga t ehk siis

$$v_k = \frac{s}{t}.$$

Tähistame nüüd esimese poole teepikkus s_1 ja selle läbimiseks kulunud aja t_1. Analoogselt olgu teise poole teepikkus s_2 ja selle läbimiseks kulunud aeg t_2. Kuna ülesande tekstis on öeldud pool teed ja pool teed, siis teepikkuste vahel kehtib seosed $s_1 = s_2 = \frac{s}{2}$ ja $s = s_1 + s_2$. Paneme need seosed keskmise kiiruse valemisse

$$v_k = \frac{s}{t} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2}.$$

Esimese ja teise teepoole kohta on öeldud, millise kiirusega auto sõitis. Kuna mõlemal juhul on tegemist ühe konstantse väärtusega, siis võime öelda, et keskmine kiirus ühtib hetkväärtusega. Seega saame mõlema teepoole kohta kirjutada

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} \text{ ja } v_2 = \frac{s_2}{t_2}.$$

Avaldame viimastest valemitest ajad paneme need keskmise kiiruse valemisse ja arvestame ka, et $s_1 = s_2$, siis saame

$$v_k = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{s_1+s_2}{\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_2}{v_2}} = \frac{s_1+s_1}{\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_1}{v_2}} = \frac{2s_1}{s_1\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{v_2+v_1}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_2+v_1}.$$

Kuna lõppvalemisse jääb ainult kiirus sisse (ei ole teepikkust ega aega jms), siis siin ei pea hetkel ühikuid SI süsteemi teisendama. Aga kui on kahtlus, siis on alati õige enne arvutamist ühikud SI süsteemi teisendada.

Paneme numbrid sisse ja arvutame tulemuse välja

$$v_k = \frac{2v_1 v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2 \cdot 50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 90\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{90\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} \approx 64\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\ .$$

Lõppvastuseks oleks, et auto keskmine kiirus on $64\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Ülesande 2 lahendus

Tähistame antud suurused:

$h = 1{,}0\ cm = \ 0{,}010\ \mathrm{m}$ – kukkumise kõrgus,

$\Delta h = 0{,}50\ \mathrm{mm} = 0{,}50 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$ – pidurdamise teepikkus ehk kui palju pidurdamisel korpus deformeerub,

Meie käest küsitakse a_p – pidurdamise kiirendus.

Vaba langemine on konstantse kiirendusega liikumine, kus kiirendus on võrdne raskuskiirendusega $g = 9{,}807\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Kuna meil pidurdamise kohta puuduvad täpsemad andmed, siis eeldame, et ka see toimub konstantse kiirendusega. Seega on kogu liikumine lahutatav kaheks konstantse kiirendusega liikumiseks. Saame kasutad konstantse kiirendusega liikumise valemeid, näiteks

$$s = \frac{v_l^2 - v_a^2}{2a}\ ,$$

kus s on läbitud teepikkus, v_l on keha lõppkiirus, v_a on keha algkiirus ja a on keha kiirendus, mis peab olema konstantne.

Vaatame seda valemit nüüd vaba langemise juhul. Olgu positiivne liikumise suund ülevalt alla. Vabal langemisel on algkiirus 0 ja saame kirjutada

$$h = \frac{v_1^2 - 0^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g}\ ,$$

kus v_1 on keha kiirus, hetkel, kui keha puudutab pinda, kuhu see kukub.

Nüüd vaatame sama asja pidurdamise jaoks. Olgu positiivne suund jällegi ülevalt alla, seega kiirendus peab olema siis negatiivne. Selleks paneme miinusmärgi kiirenduse ette ja seega vaatame tähtedega tähistatud suuruseid, kui nende absoluutväärtusi. Nüüd on lõppkiirus 0. Vaba langemise osa lõppkiirus v_1 on nüüd pidurdamise osa algkiiruseks. Saame kirjutada

$$\Delta h = \frac{0^2 - v_1^2}{-2a_p} = \frac{v_1^2}{2a_p}\ .$$

Avaldame nüüd kahest viimasest seosest keha kiiruse ruudu pinna puutumise hetkel v_1^2 ja pannes need võrduma saame leida keha kiirenduse pidurdamisel

$$h = \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow v_1^2 = 2hg \text{ ja } \Delta h = \frac{v_1^2}{2a_p} \Rightarrow v_1^2 = 2\ \Delta h\ a_p\ ,$$

$$2hg = 2\ \Delta h\ a_p\ ,$$

$$a_p = \frac{2hg}{2\ \Delta h} = \frac{hg}{\Delta h} = \frac{0{,}010\ \mathrm{m} \cdot 9{,}807\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}50 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} \approx 1{,}9 \cdot 10^2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ .$$

Lõppvastuseks saame, et pidurdamise kiirendus on $1{,}9 \cdot 10^2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ehk $0{,}19\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}^2}$.

Selle ettekujutamiseks on võib-olla lihtsam teha järgmine arvutuskäik

$$a_p = \frac{hg}{\Delta h} = \frac{h}{\Delta h} g = \frac{10 \text{ mm}}{0{,}50 \text{ mm}} g \approx 20\, g\ .$$

Seega pidurdamisel on kiirendus, mis on võrdne 20 kordse raskuskiirendusega.

Ülesande 3 soovitused

Kõige lihtsam on kiirenduse anduri suundasid kätte saada järgmiselt. Eeldatavasti ühtivad need telefoni servade suundadega, kui vaadata telefoni kui risttahukat. Kuna raskuskiirendus kogu aeg mõjub siis toetame telefoni lauale ja asetame selle erinevatele servadele. Seejuures näeme, et kord kolmest komponendist (x, y, z- telje suunalised) on 0 lähedal kaks ja üks näitab raskuskiirendust. Kui me toetame mõnele teisele servale, siis muutub see, milline komponent on 0-st erinev.

Teine võimalus on telefoni edasi-tagasi liigutada paralleelselt telefoni servadega. Liigutamise käigus on telefonil selge liikumissihiline kiirenduse komponent. Kuna käsi päris ideaalselt ei liigu, siis ka teistel telgedel suunalised kiirendused ei ole nullid, kuid oluliselt väiksemad, kui liikumissihiline kiirendus.

Ülesande 4 lahendus

1) Vaatame kõigepealt esimest vankrit. Graafikul on toodud teepikkuse ehk antud juhul koordinaadi sõltuvus ajast. Kiirus on koodinaadi tuletis aja järgi ehk siis esimesel graafikul joone tõus antud punktis. Kui joon on sirge, siis järelikult tõus on konstantne ja ka kiirus on konstantne. Vaatame nüüd ajavahemike

- 0,0 sekundil on graafik horisontaalne ehk siis koordinaat ei sõltu ajast ja seega vanker seisab paigal.
- 0,0-2,0 sekundil kõver ei ole sirge, järelikult on tegemist kiirendusega liikumisega. Tõus kasvab, seega ka kiirus kasvab.
- 2,0-10,0 sekund kõver on sirge ja vanker liigub konstantse kiirusega. Lihtsasti saame kiiruse leida. Selleks leiame sirge tõusu $\frac{14{,}5 \text{ m} - 6{,}5 \text{ m}}{10{,}0 \text{ s} - 2{,}0 \text{ s}} = 1{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- 10,0-17,0 sekundil on joon kõver ja seega vanker liigub kiirendusega. Kuna tõus väheneb, siis alguses vanker pidurdab kuni 15 sekundil on tõus 0 ja vanker seisab paigal. Edasi keerab kõver allapoole ja nüüd hakkab vanker kasvava kiirusega tagasi liikuma.
- 17,0-30,0 sekundil graafik langeb sirgelt, seega liigub vanker tagasi konstantse kiirusega. Tõusus järgi saame arvutada vankri kiiruse (analoogselt 2-10 sekundil leitule), mis on 0,4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Matemaatiliselt tuleb kiirus negatiivne, kuna vanker liigub koordinaadi positiivse suunaga vastupidises suunas, kuid meid huvitab eelkõige absoluutväärtus. Suunda tuleb alati täpsustada, sest erinevad inimesed võivad võtta teljed erinevates suundades.
- 30,0-31,5 sekundil vanker pidurdab, kuni jääb seisma, kuna graafiku tõusu absoluutväärtus väheneb ja läheneb 0-le.
- 31,5-35,0 sekundil vanker seisab. Asukoht ei muutu aja jooksul ja graafik on horisontaalne.

2) Vaatame teise vankri liikumist. Graafikul on toodud vankri kiirenduse sõltuvus ajast. Kiirus on kiirenduse integraal üle aja. Kuna graafikul on täisnurkse kujuga, siis on lihtne kasutada integraali leidmiseks teadmist, et integraal on joone alune pindala. Kiirenduse graafik ei ütle midagi algkiiruse v_0 kohta, siis siit saame kätte ainult kiiruse muudu võrreldes algkiirusega.

- 0,0-2,0 sekundil kiirendus ei ole 0, seega kiirus muutub. Leiame kiiruse muudu. Selleks leiame joone aluse pindala ristküliku pindala valemiga $0{,}50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2{,}0\ \mathrm{s} - 0{,}0\ \mathrm{s}) = 1{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Seega selle perioodi lõpuks liigub vanker kiirusega $v_0 + 1{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- 2,0-10,0 sekund kiirendus 0 ja seega liigub vanker konstantse kiirusega, mis saavutati viimase kiirenduse lõpuks ehk $v_0 + 1{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- 10,0-17,0 sekundil on vankril kiirendus, mis on vastupidine kiirendusele 0-2 sekundini. Saame kiiruse muudu siin $-0{,}20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (17{,}0\ \mathrm{s} - 10{,}0\ \mathrm{s}) = -1{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Seega selle ajavahemiku lõpuks on vankri kiirus $v_0 + 1{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = v_0 - 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- 17,0-30,0 sekundil on jällegi kiirendus null ja vanker liigub konstantse kiirusega, mille saavutas viimase kiirenduse lõpus, $v_0 - 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- 30-31,5 sekundil kiirendus ei ole null ja leiame kiiruse muudu. Kuna vahepeal kiirendus muutub, siis pindalal leidmiseks vaatame seda, kui kahte ristkülikut,
  $0{,}30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (31{,}0\ \mathrm{s} - 30{,}0\ \mathrm{s}) + 0{,}15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (31{,}5\ \mathrm{s} - 31{,}0\ \mathrm{s}) \approx 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
  Seega selle kiirenduse osa lõpuks on vankri kiirus $v_0 + 1{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = v_0$.
- 31,5-35 sekundil on kiirendus 0 ja vanker liigub konstantse kiirusega v_0.

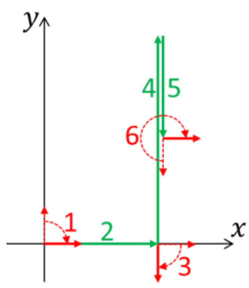
Kui nüüd neid kahte tulemust võrrelda, siis näeme, et kui $v_0 = 0{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, siis need kaks graafikut kujutavad sama liikumist, ainult ühel juhul on näidatud, kuidas vankri asukoht sõltub ajast ja teisel juhul on kiirenduse sõltuvus ajast. Soovitav on ise siia juurde teha veel kolmaski graafik, kuidas vankri kiirus sõltub ajast, kui algkiirus $v_0 = 0{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Ülesande 5 lahendus

Kõigepealt peame paika panema teljestiku, milles ma roboti liikumist vaatame. See võiks olla võimalikult mugav antud liikumiste jaoks. Valime paberil x-telje vasakult paremale ja y-telje alt ülesse. Olgu alguses robot telgede 0-punktis ja suunatud pikki y-telje ülesse ehk y-telje positiivses suunas. Nüüd teeme tabeli, kuhu märgime koordinaadid ja suuna peale igat liikumist. Pikkusühikuteks on tabelis meetrid.

Samm	x koordinaat	y koordinaat	Suund
Algpositsioon	0,0	0,0	y-telje suunas
1.	0,0	0,0	x-telje suunas
2.	3,0	0,0	x-telje suunas
3.	3,0	0,0	y-teljega vastupidises suunas
4.	3,0	5,5	y-teljega vastupidises suunas
5.	3,0	2,8	y-teljega vastupidises suunas
6.	3,0	2,8	x-telje suunas

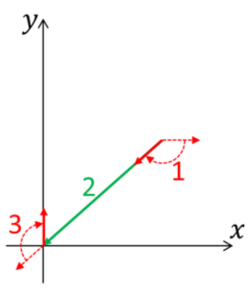
Graafiliselt näeks see välja järgmiselt, kus punasega on tähistatud suunamuutused ja rohelisega liikumised.



Seega asub robot lõpphetkel punktis, mis on koordinaatidega (3,0; 2,8) (ühikud meetites) ja suunaga x-telje suunas.

1. Selleks, et robot kõige kiiremini saaks tagasi alguspunkti tuleks teha pööre päripäeva $90° + \arctan\frac{3{,}0\ \mathrm{m}}{2{,}8\ \mathrm{m}} \approx 137°$.
   Pööre paremale $137°$.
2. Kauguse algpunktist ehk kui palju on vaja edasi liikuda, leiame Pythagorase teoreemi abil $\sqrt{(3{,}0\ \mathrm{m})^2 + (2{,}8\ \mathrm{m})^2} \approx 4{,}1\ \mathrm{m}$.
   Liikuda edasi $4{,}1\ \mathrm{m}$.
3. Viimasena tuleb robot keerata y-telje suunas. Seega teha pööre päripäeva $90° + \arctan\frac{2{,}8\ \mathrm{m}}{3{,}0\ \mathrm{m}} \approx 133°$.
   Pööre paremale $133°$.

Graafiliselt näeks see välja järgmisena, kus jälle punasega on tähistatud pöörded ja rohelisega liikumine.



Veel väiksemate pööretega ja seega ka vahest kiiremini saaks alguspunkti, kui oleks teinud alguses pöörde vasakule ja siis selg ees liikunud alguspunkti.

Ülesande 6 lahendus

Selleks on vaja joonlauda, mis võiks vähemalt 30cm või 40 cm pikk. Abiline hoiab joonlaua otsast kinni, nii et see ripuks. See kelle reaktsiooniaega määratakse paneb oma sõrmed joonlaua alumise otsa lähedale nii, et ei puuduta ei abilist ega ka joonlauda.

Nüüd määratakse ära millise koha juures on määratava sõrmed. Seejärel laseb abiline suvalisel hetkel joonlaua lahti ja määratav peab selle kinni püüdma. Nüüd fikseeritakse määratava käe asukoht joonlaual, kust ta joonlaua kinni püüdis. Teades joonlaua algset asendit määratava suhtes ja püüdmise kohta saab leida, kui palju joonlaud langes Δh. Eeldades, et tegemist on vaba langemisega, saame kasutada konstantse kiirendusega liikumise valemit.

$$\Delta h = v_o t + \frac{at^2}{2},$$

kus v_o joonlaua algkiiru, t on liikumise ehk antud juhul langemise aeg ja a on kiirendus. Kuna joonlaud seisab alguses paigal, siis algkiirus on 0 ehk v_o=0. Kiirendus on võrdne raskuskiirendusega g ehk $a = g$. Neid arvestades saame eespool toodud valemist avaldada aja,

$$\Delta h = 0 \cdot t + \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2},$$

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta h}{g}}.$$

Viimasena saadud valemi järgi saab välja arvutada reaktsiooniaja, mis kulus joonlaua kukkuma hakkamisest kuni sõrmede sulgumiseni joonlaua ümber.

<u>Iseseisvaks lahendamiseks jäätud ülesannete vastused</u>

Ülesanne iseseisevaks lahendamiseks 1 - Vastus: 301 m, 17,0° põhja suunast lääne poole.

Ülesanne iseseisevaks lahendamiseks 2 - Vastus: 0,40 m/s^2.

Ülesanne iseseisevaks lahendamiseks 3 - Vastus: 191,2 m.

Ülesanne iseseisevaks lahendamiseks 4 - Vastus: 10 m/s ja 5 m/s.

Ülesanne iseseisevaks lahendamiseks 5 - Vastus: 13 L ja 6,2 L/100km

Ülesanne iseseisevaks lahendamiseks 6 - Kui saite soovitud valemi kätte, siis on tuletus tehtud.