

Sissejuhatus mehhatroonikasse EEM3010

5. nädala loeng

Raavo Josepson
raavo.josepson@ttu.ee

Pöordliikumine

Kulgliikumine

Kohavektor \vec{r}

Kiirus $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Kiirendus $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

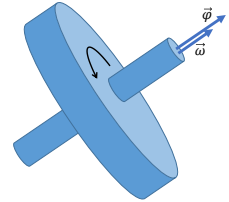
Pöordliikumine

Pöördenurk φ

Nurkkiirus $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$

Nurkkiirendus $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Sagedus ja periood $f = \frac{1}{T}$



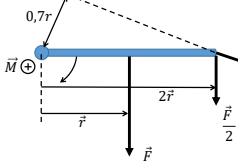
Raavo Josepson

Sissejuhatus mehhatroonikasse

2

Jõuõlg ja jõumoment

Üritame avada ust. Selleks lükkame/tõmbame ust erinevatest kohtadest. Kui palju jõudu on meil vaja ukse avamiseks?



Jõuõlg on jõu mõjumiisihki kaugus pöörlemisteljest.

(Ei ole jõu rakenduspunkti kaugus pöörlemisteljest.)

Jõumoment on jõuõla ja jõu korrutis.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Jõumomendi ühikuks on N·m.

Raavo Josepson

Sissejuhatus mehhatroonikasse

3

Punktmassi inertsmoment

Mööda ringi käiva punktmassi massiga m nurkkiiruse muutmiseks on vaja tangentsiaalkiirendust.

Selleks on vaja puutuja suunalist jõudukomponenti \vec{F}_t .

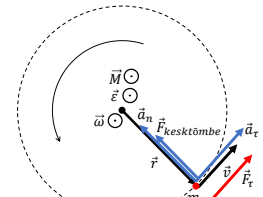
Jõukomponenti \vec{F}_t jõumoment avaldub järgmiselt:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_t$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{a}_t$$

$$\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{\epsilon} \times \vec{r} \quad (\vec{a}_t = \vec{\epsilon} \times \vec{r})$$

$$\vec{M} = mr^2\vec{\epsilon}$$



Raavo Josepson

Sissejuhatus mehhatroonikasse

4

Punktmassi inertsmoment

$$\vec{M} = mr^2\vec{\epsilon}$$

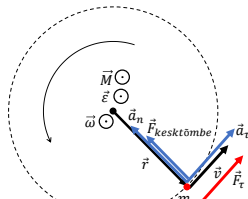
Suurust $mr^2 = I$ nimetatakse **punktmassi inertsmomentiks** ja see on süsteemi inertsiloomustav suurus pöordliikumisel.

Inertsmomenti ühik $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

(Massi analoog pöordliikumisel.)

Pöordliikumise põhiseadus ehk Newtoni II seadus pöordliikumise jaoks on

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon}.$$



Raavo Josepson

Sissejuhatus mehhatroonikasse

5

Pöordliikumine

Kulgliikumine

Kohavektor \vec{r}

Kiirus $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Kiirendus $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Mass m

Jõud $\vec{F} = m\vec{a}$

Pöordliikumine

Pöördenurk φ

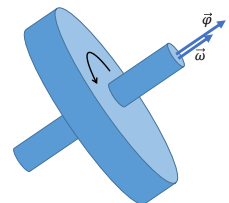
Nurkkiirus $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$

Nurkkiirendus $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Sagedus ja periood $f = \frac{1}{T}$

Inertsmoment I

Jõumoment $\vec{M} = I\vec{\epsilon}$



Raavo Josepson

Sissejuhatus mehhatroonikasse

6

Ülesanne

Kuidas leida reaalse keha inertsmomenti?

Keha inertsmoment

Keha inertsmomenti leidmiseks tuleb kokku summeerida kõigi keha punktide inertsmomentid.

$$I = \int r^2 dm, \text{ (integreeritakse üle kogu keha)}$$

kus r on punkti kaugus pöörlemisteljest ja dm on punkti mass.

Ülesanne

Kas ühel kehal on üks inertsmomentide väärtus või mitu?

Rõnga inertsmoment

Vaatame inertsmomenti **sümmeetriatelje** suhtes (telg tuleb joonisest välja).

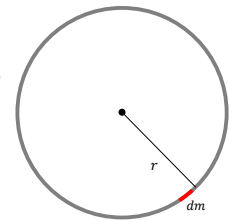
Olgu rõnga raadius r ja mass m .

Ühe väikese rõngatüki mass on dm .

$$I_{\text{rõngas}} = \int r^2 dm \quad \text{(integreerida üle rõnga)}$$

$$I_{\text{rõngas}} = r^2 \int dm$$

$$I_{\text{rõngas}} = m r^2$$



Ketta inertsmoment

Vaatame inertsmomenti **sümmeetriatelje** suhtes.

Olgu ketta raadius R ja mass m .

Jälgime ketta rõngasteks. Ühe rõnga mass on dm , raadius r ja paksus dr .

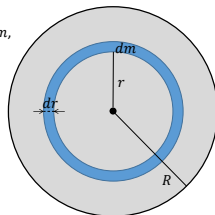
$$I_{\text{ketas}} = \int dI_{\text{rõngas}} \quad \text{(integreerida üle ketta)}$$

$$I_{\text{ketas}} = \int r^2 dm$$

$$dm = \rho 2\pi r dr,$$

kus ρ on ketta tihedus ja a on ketta paksus joonisega risti olevas sihis.

$$I_{\text{ketas}} = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr$$



Ketta inertsmoment

$$I_{\text{ketas}} = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr$$

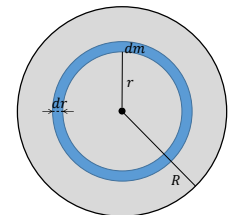
$$I_{\text{ketas}} = 2\pi \rho a \int_0^R r^3 dr$$

$$I_{\text{ketas}} = 2\pi \rho a \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \rho \pi a \left[\frac{r^4}{2} \right]_0^R$$

$$I_{\text{ketas}} = \rho \pi R^2 a \frac{R^2}{2} - 0$$

$$I_{\text{ketas}} = \frac{m R^2}{2}$$

Valemist on näha, et sama valem kehtib ka silindri korral, kuna silindri kõrgus taandus valemist välja.



Steineri lause (paralleelsete telgede teoreem)

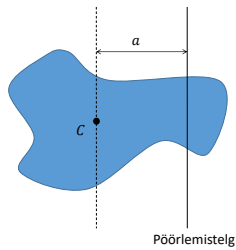
$$I = I_C + ma^2,$$

kus I on keha inertsmoment etteantud telje suhtes,

I_C on keha inertsmoment telje suhtes, mis läbib masskeset ja on paralleelne etteantud teljega,

m on keha mass,

a on telgede vaheline kaugus.



Raavo Josepson

Sisälühatus mehhatroonikasse

13

Impulssmoment ehk pöörlemishulk

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

kus \vec{L} on keha impulssmoment (ühik $\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$),

I on keha inertsmoment,

$\vec{\omega}$ on keha nurkkiirus.

Punktmassi korral kehtib

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{p} &= m(\vec{r} \times \vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &= m r^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega} = \vec{L}. \end{aligned}$$

Leiame impulssmomenti tuletise aja järgi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} I \vec{\omega} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\epsilon} = \vec{M}.$$

Impulssmomenti muutumise kiirus ajas on võrdne kehale mõjuva jõumomendiga.

Impulssmomenti jäävuse seadus

Kui kehale mõjuv summaarne jõumoment on 0, siis keha impulssmoment on jääv.

Raavo Josepson

Sisälühatus mehhatroonikasse

14

Pöördliikumine

Kulgliikumine

Kohavektor \vec{r}

$$\text{Kiirus } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\text{Kiirendus } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Mass m

$$\text{Jõud } \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{Impulss } \vec{p} = m\vec{v}$$

Pöördliikumine

Pöördenurk φ

$$\text{Nurkkiirus } \vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$$

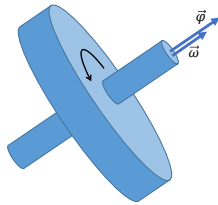
$$\text{Nurkkiirendus } \vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\text{Sagedus ja periood } f = \frac{1}{T}$$

Inertsmoment I

$$\text{Jõumoment } \vec{M} = I\vec{\epsilon}$$

$$\text{Impulssmoment } \vec{L} = I\vec{\omega}$$



Raavo Josepson

Sisälühatus mehhatroonikasse

15

Iseseisev töö

Iseseisvalt uuesti läbi vaadata loengus käsitletud teemad ja neist aru saada.

Seejärel ära lahendada iseseisvaks lahendamiseks jäätud ülesanded.

Õpik:

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker. Füüsika põhikursus : õpik kõrgkoolile I köide. Eesti Füüsika Selts 2011 (Tallinn: Printon)

§ 10.6-10.9, 11.4-11.11

Raavo Josepson

Sisälühatus mehhatroonikasse

16