**EEM3010 Sissejuhatus mehhatroonikasse**

**3. nädala praktikumi ülesannete lahendused**

Soovitan väga enne lahenduste vaatamist ise proovida ülesandeid lahendada.

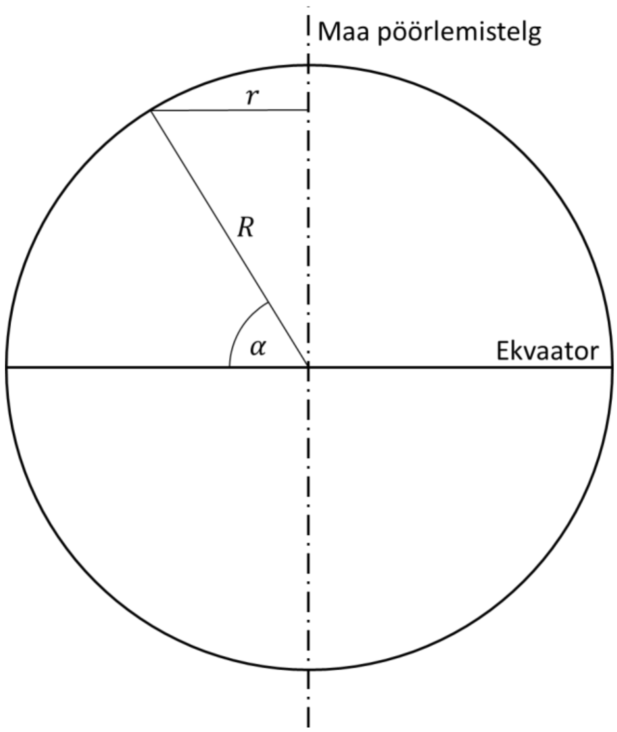
Tihti saab ülesannet mitut moodi lahendada, kuid lõppvastus peab alati olema sama.

## Ülesanne 1.

Seda ülesannet saab lahendada pöördliikumise kaudu või ka puhtalt loogika põhjal kasutades kulgliikumist. Alustame kulgliikumise lahendusest.

Kuna maakera pöörleb konstantse kiirusega, siis saame kasutada keskmist kiiruse valemit $v = \frac{s}{t}$. Selle leidmiseks tuleb leida sobiv aeg ($t$) ja sellele ajale vastav teepikkus ($s$). Kõige lihtsam on võtta üks täistiir. Esimeses lähenduses loeme, et Maa teeb ühe täistiiru 24 h. Seega teepikkuseks ekvaatoril oleks Maa ümbermõõt $2\pi R$, kus $R$ on Maa raadius. Maa raadiuse saame teatmeteostest või internetist ja see on ligikaudu $6{,}3 \cdot 10^3$ km. Meilt aga küsitakse kiirust Eesti geograafilisel laiusel, mitte ekvaatoril.

Siin tuleb järele uurida, mis on geograafiline laiuskraad. Meie jaoks on vaja teada, et laiuskraad näitab Maa keskpunktist vaadatuna, kui suur nurk on ekvaatori ja antud koha vahel (joonisel nurk $\alpha$). Telefoni GPS annab, et Tallinna Tehnikaülikool asub 59,40 lauskraadil. Nüüd saame leida, kui suure raadiusega ($r$) ringi teeb Eesti ööpäevas tänu Maa pöörlemisele.




Selle ringi pikkus avaldub järgmiselt

$$s = 2\pi r = 2\pi R\cos\alpha.$$

Seega keskmine kiirus avaldub

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R\cos\alpha}{t} = \frac{2\pi\cdot 6{,}37\cdot 10^3\mathrm{km}\cdot\cos 59{,}40\,°}{24\ \mathrm{h}} \approx 8{,}5\cdot 10^2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Lõppvastuseks oleks, et Eesti liigub kiirusega $8{,}5\cdot 10^2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Vaatame nüüd seda ülesannet lähtuvalt pöördliikumisest. Samuti vaatame jällegi ühte täistiiru. 24 h tunniga pöördub Maa ühe täispöörde ehk pöördenurk on $\varphi = 2\pi$ rad. Seega saame välja arvutada Maa nurkkiiruse

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Nüüd kasutame seost nurkkiiruse ja joonkiiruse vahel

$$v = \omega r.$$

Pannes kaks viimast valemit kokku, lisaks arvestame ka ringjoone raadiust Eesti laiuskraadil, mille leidsime esimeses lahenduse variandis. Ühes arvudega saame

$$v = \frac{\varphi}{t}R\cos\alpha = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{24\ \mathrm{h}}\cdot 6{,}37\cdot 10^3\mathrm{km}\cdot\cos 59{,}40\,° \approx 8{,}5\cdot 10^2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Saime sama vastuse, mille saime ka varem ja ka arvudega valem on sama, mis oli esimeses lahenduses.

**Ülesanne 2.**

Tähistame antud suurused:

$m = 77\ \mathrm{kg}$ – ratturi mass,

$f_1 = 66\ \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{min}} = 1{,}1\ \mathrm{Hz}$ – väntamissagedus,

$N_1 = 45$ – hammasrataste arv pedaalide juures,

$N_2 = 28$ – hammasrataste arv ratta juures,

$d = 72\ \mathrm{cm} = 0{,}72\ \mathrm{m}$ – ratta läbimõõt.

Meie käest küsitakse $v$ - ratta kiirus.

Ratta kiiruse leidmiseks peame teadma seost ratta joonkiiruse ($v$) ja nurkkiiruse ($\omega$) vahel

$$v = \omega r,$$

kus $r$ on ratta raadius. Nüüd peame teadma ka seost ratta nurkkiiruse ja ratta pöörlemissageduse ($f$) vahel

$$\omega = 2\pi f.$$

Arvestame ka kahte järgmist asja. Esiteks seost ratta raadiuse ja diameetri vahel on $r = \frac{d}{2}$. Teiseks, et hammasrattad suurendavad või vähendavad nurkkiirust niimitu korda, kui on nende suhe $\frac{N_1}{N_2}$. Seega ratta pöörlemissagedus on seotud väntamissagedusega järgmise valemi alusel

$$f = \frac{N_1}{N_2} f_1.$$

Paneme nüüd kolm eraldi välja toodud valemit kokku ja arvud sisse.

$$v = \omega r = 2\pi f r = 2\pi \frac{N_1}{N_2} f_1 r = 2\pi \frac{N_1}{N_2} f_1 \frac{d}{2} = \pi \frac{N_1}{N_2} f_1 d =$$

$$= \pi \cdot \frac{45}{28} \cdot 1{,}1\ \mathrm{Hz} \cdot 0{,}72\ \mathrm{m} = 3{,}9987 \ldots \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 14\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Siin on oluline, et kõik suurused oleksid ühte süsteemi teisendatud. Lõppvastuseks on 14 km/h. Lisaks nägime, et ratturi massi ei ole vaja.

**Ülesanne 3.**

Tähistame antud suurused:

$f_1 = 240\ \frac{p}{min} = 4{,}00\ \mathrm{Hz}$ – esimese hooratta pöörlemise sagedus,

$t_1 = 10{,}0\ s$ – esimese hooratta pöörlemise aeg,

$f_2 = 360\ \frac{p}{min} = 6{,}00\ \mathrm{Hz}$ – teise hooratta pöörlemise sagedus,

$N_2 = 20{,}0$ – teise hooratta pöörete arv.

Selleks, et vastata küsimustele, peame leidma järgmised suurused:

$t_2$ – teise hooratta pöörlemise aeg,

$N_1$ – esimese hooratta pöörete arv,

$\varepsilon_1$ – esimese hooratta nurkkiirendus,

$\varepsilon_2$ – teise hooratta nurkkiirendus.

Kuna mõlema hooratta lõppvalem peab ühes küsitavate suurustega sisaldama samu suuruseid, siis tuletame valemi alguses ilma seda sidumata esimese või teise hoorattaga.

Pidurduse kohta meil täpsemad andmed puuduvad, seega vaatame seda, kui konstantse nurkkiirendusega pöörlemist. Me ei tea, kas nurkkiirendus ajas muutus või mitte ja peame piirduma keskmise nurkkiirendusega. Seega saame kasutada konstantse nurkkiirendusega liikumise valemit:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

kus $\varphi$ on pöördenurk, $\varphi_0$ on algne pöördenurk (selle võime lugeda 0-ks), $\omega_0$ on algkiirus (ei ole 0, kuna ratas pöörleb), $\varepsilon$ on nurkkiirendus ja $t$ on aeg. Kuna me nurkkiirendust ei tea, siis kasutame ka teist valemit

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

kus $\omega$ on hooratta lõppkiirus, mis antud juhul on 0, hooratas jääb seisma. Avaldame viimati toodud valemist nurkkiirenduse ja paneme selle pöördenurga valemisse,

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t},$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{-\frac{\omega_0}{t} t^2}{2} = \omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

Nüüd tuleb pöördenurk siduda täispöörete arvuga ($N$). Kuna üks täispööre on $2\pi$ rad, siis $\varphi = 2\pi N$. Samuti on vaja seost nurkkiiruse ja pöörlemissageduse ($f$) vahel, $\omega = 2\pi f$. Asendame nüüd eespool tuletatud valemis pöördenurga ja nurkkiiruse täispöörete arvu ja sagedusega,

$$\varphi = \frac{\omega_0 t}{2},$$

$$2\pi N = \frac{2\pi f_0 t}{2},$$

$$N = \frac{f_0 t}{2},$$

kus $f_0$ on algne pöörlemissagedus. Viimati saadud valmist saame välja arvutada, teise ratta pöörlemisaja ja esimese ratta täispöörete arvu, et teada, kumb pöörles kauem ja kumb tegi rohkem pöördeid. Seejuures peame arvestama, et ühikud tuleb teisendada SI süsteemi.

Teise ratta pöörlemisaeg avaldub järgmiselt:

$$t_2 = \frac{2N_2}{f_2} = \frac{2 \cdot 20{,}0}{6{,}00\ \mathrm{Hz}} \approx 6{,}67\ \mathrm{s}.$$

Seega esimene hooratas pöörles kauem (10,0 s).

Leiame nüüd mitu pööret tegi esimene hooratas,

$$N_1 = \frac{f_1 t_1}{2} = \frac{4{,}00\ \mathrm{Hz} \cdot 10{,}0\ \mathrm{s}}{2} = 20{,}0.$$

Seega mõlemad hoorattad tegid sama palju pöördeid (20,0).

Nurkkiirenduste jaoks võtame eespool olnud nurkkiirenduse valemi ja asendame seal nurkkiirenduse pöörlemissagedusega,

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t},$$

$$\varepsilon = -\frac{2\pi f_0}{t}.$$

Kuna meilt küsitakse, et kummal hoorattal oli suurem nurkkiirendus, siis vaatame nurkkiirenduste absoluutväärtust. Arvutame need välja,

$$|\varepsilon_1| = \frac{2\pi f_1}{t_1} = \frac{2\pi \cdot 4{,}00\ \mathrm{Hz}}{10{,}0\ \mathrm{s}} \approx 2{,}51\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2},$$

$$|\varepsilon_2| = \frac{2\pi f_2}{t_2} = \frac{2\pi \cdot 6{,}00\ \mathrm{Hz}}{6{,}67\ \mathrm{s}} \approx 5{,}65\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2},$$

Seega teine hooratas pöörles suurema nurkkiirendusega.

Lõppvastuseks saame, et esimene hooratas pöörles kauem, mõlemad hoorattad tegid sama palju pöördeid ja teise hooratta nurkkiirendus oli suurem.

**Ülesanne 4.**

Tähistame antud suurused:

$f_{str} = 30\ \mathrm{Hz}$ – stroboskoobi sagedus,

$\varphi = 5\ ° \approx 0{,}09\ \mathrm{rad}$ – tiiviku pöördenurk.

Leidma peame:

$f_{tiivik}$ – tiiviku pöörlemissagedus,

$t$ – stroboskoobi välgatuse pikkus.

Stroboskoop on seade, mis annab ette antud sagedusega lühikesi valguseimpulsse. Kui nüüd stroboskoobiga valgustada mõnda korduvat protsessi (näiteks pöörlevat keha) ja stroboskoobi sagedus ühtib korduva protsessi sagedusega (näiteks pöörlemissagedusega), siis tundub silmale, et asi seisab paigal.

Antud ülesandes valgustatakse stroboskoobiga 3 labaga tiivikut. Kuna kõik labad on tiivikul enamasti ühesugused, siis saame järgmised võimalike sageduste väärtused. Seda seetõttu, et enamasi me ei erista, milline laba on ette keeratud

- Kahe välgatuse vahelise ajaga pöördub tiivik edasi ainult ühe laba võrra ehk $\frac{1}{3}$ pööret. Siis peab tiiviku sagedus olema $f_{tiivik} = \frac{1}{3} f_{str} = \frac{1}{3} \cdot 30\ \mathrm{Hz} = 10\ \mathrm{Hz}$.
- Kahe välgatuse vahelise ajaga pöördub tiivik edasi kahe laba võrra ehk $\frac{2}{3}$ pööret. Siis peab tiiviku sagedus olema $f_{tiivik} = \frac{2}{3} f_{str} = \frac{2}{3} \cdot 30\ \mathrm{Hz} = 20\ \mathrm{Hz}$.
- Kahe välgatuse vahelise ajaga pöördub tiivik edasi kolme laba võrra ehk ühe täispöörde. Siis peab tiiviku sagedus olema $f_{tiivik} = f_{str} = 30\ \mathrm{Hz}$.
- Kahe välgatuse vahelise ajaga pöördub tiivik edasi ühe täispöörde ja veel ühe labade vahe võrra ehk $1\frac{1}{3}$ pööret. Siis peab tiiviku sagedus olema $f_{tiivik} = 1\frac{1}{3} f_{str} = \frac{4}{3} \cdot 30\ \mathrm{Hz} = 40\ \mathrm{Hz}$.

Seda rida võime jätkata lõpmatuseni. Lühidalt saame öelda, et tiivik võib pöörelda sagedustega $n \cdot 10\ \mathrm{Hz}$, kus $n$ on positiivne täisarv.

Leiame nüüd kui pikk tohib olla stroboskoobi välgatus kõige madalama sageduse korral. Kui välgatus on liiga pikk, siis liigub tiivik liiga palju ja pilt muutub häguseks. Ülesande tekstis on öeldud, kui palju tohib tiivik liikuda välgatuse ajal.

Kuna stroboskoobi valgusimpulssidega vaadates näib tiivik paigal olevat siis järelikult liigub tiivik konstantse sagedusega. Seega ka nurkkiirus on konstantne ja võime kasutada keskmise nurkkiiruse valemit, kuna keskmine ja hetknurkkiirus on samad,

$$\omega = \frac{\varphi}{\mathrm{t}},$$

kus $\omega$ on nurkkiirus, $\varphi$ on pöördenurk ja $t$ selle pöörde tegemiseks kulunud aeg. Nüüd on vaja teada, kuidas on seotud nurkkiirus ja pöörlemissagedus ($f$), $\omega = 2\pi f$. Asendame selle nurkkiiruse valemisse ja avaldame aja,

$$2\pi f = \frac{\varphi}{\mathrm{t}},$$

$$t = \frac{\varphi}{2\pi f}.$$

Paneme nüüd arvud sisse

$$t = \frac{0{,}09\ \mathrm{rad}}{2\pi \cdot 10\ \mathrm{Hz}} \approx 0{,}001\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{ms}.$$

Siin tuleb silmas pidada, et SI süsteemis on nurga mõõtühikuks radiaan mitte kraad.

Lõppvastuseks saame on, et tiivik võib pöörelda järgmiste sagedustega 10 Hz, 20 Hz, 30 Hz, 40 Hz jne ehk $n \cdot 10\ \mathrm{Hz}$, kus $n$ on positiivne täisarv. Kõige madalama sageduse korral ei tohi välgatuse pikkus olla suurem kui 1 ms.

**Ülesanne 5.**

Kuna ühtegi suurust ei ole antud, siis tuleb need ise otsida. Enne vaatame valemitest, milliseid suurusi meil oleks teada vaja. Kõigepealt vajame seost, mis seob punkti joonkiirust ja nurkkiirust,

$$v = \omega r,$$

kus $v$ on punkti joonkiirus, $\omega$ on punkti nurkkiirus ja $r$ on punkti kaugus pöörlemisteljest. Edasi saame nurkkiiruse siduda ketta pöörlemissagedusega ($f$) ja perioodi ($T$), $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Internet annab, et tiiviku ringi diameeter on umbes $d \approx 1{,}0 \cdot 10^2\ \mathrm{m}$. YouTube videote järgi teeb tiivik ühes täispöörde ära perioodiga $T \approx 8\ \mathrm{s}$.

Asendame joonkiiruse valemis nurkkiiruse pöörlemissagedusega. Arvestame ka, et raadius on pool läbimõõtu ning saamegi servapunkti joonkiiruse välja arvutada,

$$v = \omega r = 2\pi f r = \frac{2\pi}{T}\frac{d}{2} = \frac{\pi d}{T} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}0 \cdot 10^2\ m}{8\ \mathrm{s}} \approx 4 \cdot 10^1\ \frac{m}{s}.$$

Lõppvastuseks saame, et tuulegeneraatori tiiviku otsa serva joonkiirus on umbes $4 \cdot 10^1\ \frac{m}{s}$. See sõltub väga tugevasti labade suurusest ja erinevad tuulegeneraatorid pöörlevad erineva sagedusega.

Soovitan arvutata välja, mitu kilomeetrit tunnis see teeb ja võrrelda seda lubatud sõidukiirustega Eesti maanteedel.

**Ülesanne 6.**

Sekundiosuti teeb ühe täistiiru ära 1 minutiga. Tunniosuti teeb ühe täistiiru ära 12 tunniga ehk

$$12\ \mathrm{h} \cdot 60\ \frac{\mathrm{min}}{\mathrm{h}} = 720\ \mathrm{min}\ .$$

Kuna ühe täispöörde tegemiseks vajab tunniosuti 720 korda rohkem aega, kui sekundiosuti, siis nii mitu korda peavad olema ka osutite nurkkiirused erinevad.