

Sissejuhatus mehhatroonikasse EEM3010

5. nädala loeng

Raavo Josepson
raavo.josepson@taltech.ee

1

Pöördliikumine

Kulgliikumine

Kohavektor \vec{r}

Kiirus $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Kiirendus $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

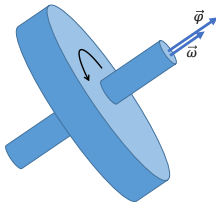
Pöördliikumine

Pöördenurk φ

Nurkkiirus $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$

Nurkkiirendus $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Sagedus ja periood $f = \frac{1}{T}$



Raavo Josepson

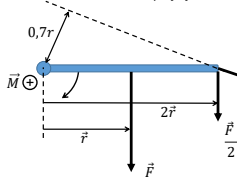
Sissejuhatus mehhatroonikasse

2

2

Jõuõlg ja jõumoment

Üritame avada ust. Selleks lükkame/tõmbame ust erinevatest kohtadest. Kui palju jõudu on meil vaja ukse avamiseks?



Jõuõlg on jõu mõjumiisih
kaugus pöörlemisteljest.

(Ei ole jõu rakenduspunkti
kaugus pöörlemisteljest.)

Jõumoment on jõuõla ja jõu
korrutis.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Jõumomendi ühikuks on N·m.

Raavo Josepson

Sissejuhatus mehhatroonikasse

3

3

Punktmassi inertsmoment

Mööda ring käiva punktmassi massiga m nurkkiiruse muutmiseks on vaja tangentsiaalkiirendust.

Selleks on vaja puutuja suunalist jõudukomponenti \vec{F}_t .

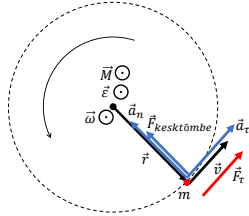
Jõukomponenti \vec{F}_t jõumoment avaldub järgmiselt:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_t$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{a}_t$$

$$\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r})$$

$$\vec{M} = mr^2\vec{\varepsilon}$$



Raivo Jõepeon

Sisälühatus mehitatsooniklassis

4

4

Punktmassi inertsmoment

$$\vec{M} = mr^2\vec{\varepsilon}$$

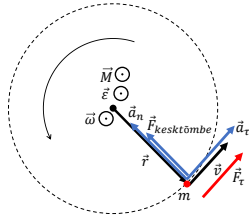
Suurust $mr^2 = I$ nimetatakse **punktmassi inertsmomendiks** ja see on süsteemi inertsiloomustav suurus pöörliikumisel.

Inertsmomendi ühik $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

(Massi analoog pöörliikumisel.)

Pöörliikumise põhiseadus ehk Newtoni II seadus pöörliikumise jaoks on

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}.$$



Raivo Jõepeon

Sisälühatus mehitatsooniklassis

5

5

Pöörliikumine

Kulgliikumine

Kohavektor \vec{r}

$$\text{Kiirus } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\text{Kiirendus } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Mass m

$$\text{Jõud } \vec{F} = m\vec{a}$$

Pöörliikumine

Pöördenurk φ

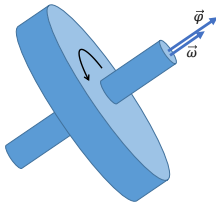
$$\text{Nurkkiirus } \vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\text{Nurkkiirendus } \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Sagedus ja periood $f = \frac{1}{T}$

Inertsmoment I

$$\text{Jõumoment } \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$



Raivo Jõepeon

Sisälühatus mehitatsooniklassis

6

6

Ülesanne

Kuidas leida reaalse keha inertsmomenti?

Raivo Josepson

Siseregularne mehhanika

7

7

Keha inertsmoment

Keha inertsmomenti leidmiseks tuleb kokku summeerida kõigi keha punktide inertsmomentid.

$$I = \int r^2 dm, \text{ (integreeritakse üle kogu keha)}$$

kus r on punkti kaugus pöörlemisteljest ja dm on punkti mass.

Raivo Josepson

Siseregularne mehhanika

8

8

Ülesanne

Kas ühel kehal on üks inertsmomenti väärtus või mitu?

Raivo Josepson

Siseregularne mehhanika

9

9

Rõnga inertsmoment

Vaatame inertsmomenti **sümmeetriatelje** suhtes (telg tuleb joonisest välja).

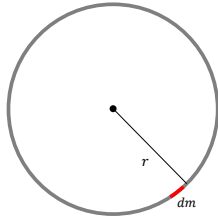
Olgu rõnga raadius r ja mass m .

Ühe väikese rõngatüki mass on dm .

$$I_{\text{rõngas}} = \int r^2 dm \quad (\text{intgreerida üle rõnga})$$

$$I_{\text{rõngas}} = r^2 \int dm$$

$$I_{\text{rõngas}} = m r^2$$



Raivo Josepson

Sisäljätatus mehatroonikasse

10

10

Ketta inertsmoment

Vaatame inertsmomenti **sümmeetriatelje** suhtes.

Olgu ketta raadius R ja mass m .

Jagame ketta rõngasteks. Ühe rõnga mass on dm , raadius r ja paksus dr .

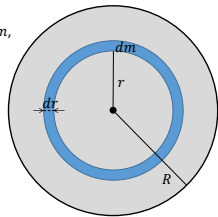
$$I_{\text{ketas}} = \int dI_{\text{rõngas}} \quad (\text{intgreerida üle ketta})$$

$$I_{\text{ketas}} = \int r^2 dm$$

$$dm = \rho 2\pi r a dr,$$

kus ρ on ketta tihedus ja a on ketta paksus joonisega risti olevas sihis.

$$I_{\text{ketas}} = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r a dr$$



Raivo Josepson

Sisäljätatus mehatroonikasse

11

11

Ketta inertsmoment

$$I_{\text{ketas}} = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r a dr$$

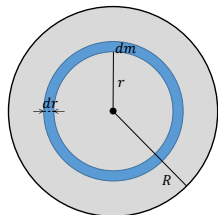
$$I_{\text{ketas}} = 2\pi \rho a \int_0^R r^3 dr$$

$$I_{\text{ketas}} = 2\pi \rho a \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \rho \pi a \left[\frac{r^4}{2} \right]_0^R$$

$$I_{\text{ketas}} = \rho \pi R^2 a \frac{R^2}{2} = 0$$

$$I_{\text{ketas}} = \frac{m R^2}{2}$$

Valemist on näha, et sama valem kehtib ka silindri korral, kuna silindri kõrgus taandus valemist välja.



Raivo Josepson

Sisäljätatus mehatroonikasse

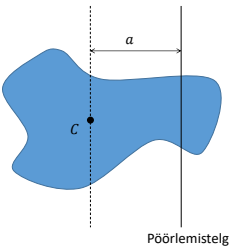
12

12

Steineri lause (paralleelsete telgede teoreem)

$I = I_C + ma^2$,

kus I on keha inertsmoment etteantud telje suhtes,
 I_C on keha inertsmoment telje suhtes, mis läbib massikeset ja on paralleelne etteantud teljega,
 m on keha mass,
 a on telgede vaheline kaugus.



Raivo Josepson Sissejuhatus mehaanikaklassi 13

13

Impulssmoment ehk pöörlemishulk

$\vec{L} = I\vec{\omega}$,

kus \vec{L} on keha impulssmoment (ühik $\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$),
 I on keha inertsmoment,
 $\vec{\omega}$ on keha nurkkiirus.

Punktmassi korral kehtib
 $\vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r}) = m r^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega} = \vec{L}$.

Leiame impulssmomenti tuletise aja järgi
 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} I \vec{\omega} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\epsilon} = \vec{M}$.

Impulssmomenti muutumise kiirus ajas on võrdne kehale mõjuva jõumomendiga.

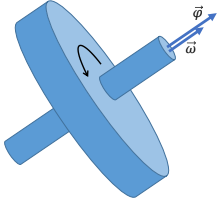
Impulssmomenti jäävuse seadus
 Kui kehale mõjuv summaarne jõumoment on 0, siis keha impulssmoment on jääv.

Raivo Josepson Sissejuhatus mehaanikaklassi 14

14

Pöördliikumine

<u>Kulgliikumine</u>	<u>Pöördliikumine</u>
Kohavektor \vec{r}	Pöördenurk φ
Kiirus $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Nurkkiirus $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Kiirendus $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Nurkkiirendus $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Mass m	Sagedus ja periood $f = \frac{1}{T}$
Jõud $\vec{F} = m\vec{a}$	Inertsmoment I
Impulss $\vec{p} = m\vec{v}$	Jõumoment $\vec{M} = I\vec{\epsilon}$
	Impulssmoment $\vec{L} = I\vec{\omega}$



Raivo Josepson Sissejuhatus mehaanikaklassi 15

15

Iseseisev töö

Iseseisvalt uuesti läbi vaadata loengus käsitletud teemad ja neist aru saada.

Seejärel ära lahendada iseseisvaks lahendamiseks jäätud ülesanded.

Õpik:

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker. Füüsika põhikursus : õpik kõrgkoolile I köide. Eesti Füüsika Selts 2011 (Tallinn: Printon)

§ 10.6-10.9, 11.4-11.11

Raivo Jõepeoni

Sisüloenduse mehhatsoonikassa

56
